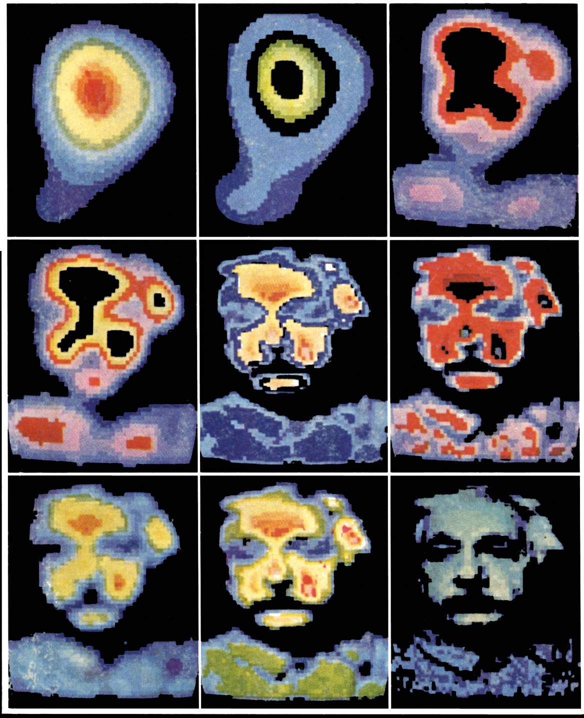
PENSARE PER MODELLI

schemi logici e strumenti di calcolo



MONDADORI

THE OPEN UNIVERSITY

TEST

Tascabili delle
Edizioni
Scientifiche e
Tecniche

MONDADORI

The Open University

Pensare per modelli

schemi logici e strumenti di calcolo

MONDADORI / THE OPEN UNIVERSITY

Direttore editoriale
EDGARDO MACORINI

Redazione
FILIPPO MACALUSO, CLAUDIO TONINI

Copertina, grafica e impaginazione
ENRICO GENOVESI

Titolo originale
THE MAN-MADE WORLD - Technology Foundation Course
Unit O MODELLING 1, unit 4S USING LETTERS INSTEAD OF NUMBERS, unit 18 MODELLING II, di Michael Hussey

Chairman and general editor del corso inglese
GEOFFREY S. HOLISTER

Coordinamento dell'edizione italiana
MARIO SILVESTRI

Consulenza
CAMILLO BUSSOLATI

Traduzione
LIVIO GRILLO, COSTANTINO PANZANI

In copertina
Einstein elettronico (H. Franke, da 'Rivista IBM')

ISSN 0391-2884

Prima edizione: gennaio 1979

Indice

Premessa

I modelli ricorrono ampiamente nella tecnologia e in ogni campo che implichi un'attività di progettazione. Essi permettono di riprodurre le caratteristiche essenziali degli oggetti e dei processi reali, eliminando quegli aspetti che, ai fini del nostro studio, costituirebbero un elemento di disturbo e una fuorviante complicazione. L'impiego dei modelli è assai più vasto di quanto sembri. In maniera spesso non consapevole, vi si ricorre nell'affrontare anche i problemi più banali e nel pianificare ogni genere di decisione.

Il volume introduce il concetto di modello, ne illustra i diversi tipi, le modalità di funzionamento e i limiti in cui è possibile servirsene. Una succinta esposizione di algebra elementare (che occupa i capitoli 2, 3, 4 e 5) permette di impratichirsi su alcune tecniche di manipolazione delle grandezze attraverso i simboli che le rappresentano, e ciò è di grande importanza nella modellistica, in cui all'essenzialità della schematizzazione adottata deve corrispondere uno strumento altrettanto essenziale per il trattamento dei dati.

Le scienze offrono una gamma assai ampia di modelli a cui i tecnologi spesso ricorrono per prevedere e realizzare le proprietà peculiari dei progetti a cui lavorano. In questo volume viene illustrato il modello della struttura atomica (desunto dalla chimica, ma molto semplificato) per dare un esempio di modellistica nel campo delle scienze.

Infine, i modelli in scala, cioè le riproduzioni in dimensioni ridotte di macchine, edifici, strutture e in genere prodotti della tecnologia che hanno grandi dimensioni e che vanno provati, prima di essere fabbricati in scala reale, in condizioni il più possibile simili a quelle che dovranno affrontare nell'impiego. L'esame dei criteri fondamentali per la costruzione di tale tipo di modelli introduce al concetto di misura e ai principi dell'analisi dimensionale.

Finalità del volume

La lettura di questo volume vi consentirà di:

1) descrivere la relazione tra un modello e il prototipo di partenza;

2) imparare a costruire il modello di un prototipo assegnato con un procedimento "passo a passo", che richiede di individuare le proprietà rilevanti del prototipo e collegarle mediante le interazioni elementari tra di esse;

3) comprendere come ogni modello venga costruito, anche solo mentalmente, per un uso preciso, e come quindi allo stesso prototipo possano corrispondere modelli differenti, ciascuno definito da un diverso gruppo di proprietà scelte tra quelle che caratterizzano il comportamento del prototipo;

4) dare qualche esempio dei diversi tipi di modelli, desumendoli da quanto detto in questo volume o altrove;

5) familiarizzarvi con la rappresentazione simbolica di grandezze numeriche, e operare su questi simboli per addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, sostituzione;

6) spiegare il concetto di "numero negativo";

7) operare con le potenze e le radici;

8) semplificare un'espressione algebrica;

9) imparare a tradurre in un grafico, che può essere solo qualitativo, la relazione tra due grandezze che variano insieme;

10) spiegare come da un grafico si possano ricavare i tassi di variazione delle grandezze che vi sono rappresentate, e prevederne l'andamento;

11) comprendere i concetti di derivata e di integrale;

12) descrivere un modello semplificato della struttura atomica e spiegare come esso consenta di prevedere l'esistenza di gruppi di elementi e composti con proprietà analoghe;

13) spiegare come vada costruito un modello in scala e a quali condizioni esso debba soddisfare perché dia indicazioni attendibili sul comportamento del prototipo;

14) dedurre le dimensioni fisiche di una grandezza a partire dalla sua definizione;

15) spiegare che cos'è un sistema coerente di unità di misura.

Pensare per modelli

schemi logici
e strumenti di calcolo

1 Le basi della modellistica

In ogni ben fornito negozio di giocattoli si possono trovare trenini a molla, orsacchiotti, pistole ad acqua, bambole, il gioco del Monopoli, scatole di montaggio per aeromodelli, costruzioni di legno, cere per modellare, scatole di Meccano. I primi dell'elenco sono modelli di oggetti che o esistono, come i treni e gli orsacchiotti, o potrebbero esistere (con un po' d'immaginazione), come le pistole a raggio della morte o le fate. Anche il gioco del Monopoli è un modello, in quanto rappresentazione semplificata di un sistema economico. Le scatole di montaggio possono essere utilizzate solo per costruire ben definiti modelli, mentre i pezzi delle costruzioni, le cere plasmabili e il Meccano sono più versatili: essi possono essere usati per costruire un numero indefinito di modelli differenti. Giocando con questi oggetti, i bambini imparano molte cose sul mondo nel quale stanno crescendo.

In questo volume si spiegherà come i tecnologi, gli scienziati, gli economisti (e, di fatto, tutti quanti) sviluppino la comprensione del mondo esterno attraverso l'uso di modelli, che differiscono però dai giocattoli per il fatto di essere generalmente più sofisticati. Ciò che la scienza fa per la tecnologia è un po' come metterle a disposizione un grande Meccano, una scatola di montaggio del tipo più generale, non finalizzata (e limitata) alla costruzione di specifici modelli.

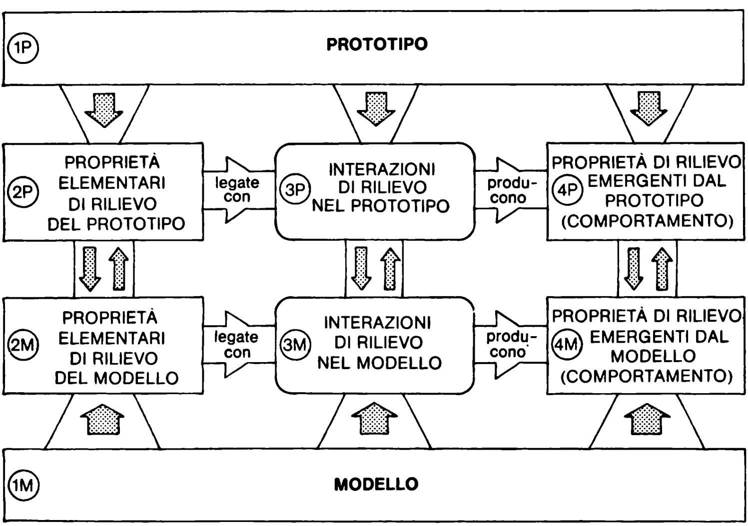
1.1 Scopi di un modello

Uno dei tipi più semplici di modello è quello usato dagli architetti per dare l'idea di come apparirà una certa costruzione. Esso però non contiene né circuiti idraulici né impianti di riscaldamento in miniatura. Nella sua incompletezza, esso esemplifica una delle caratteristiche essenziali di tutti i modelli, e cioè che solo una parte delle proprietà dell'oggetto vi è riprodotta. Si possono trovare moltissimi aspetti per i quali il modello dell'architetto e l'edificio in questione differiscono. Per esempio, il modello può essere di legno e ricavato da un unico blocco, mentre l'edificio è di cemento e acciaio e non è certamente in un sol pezzo. Le sole caratteristiche che il modello deve avere per servire allo scopo sono l'aspetto esteriore, i colori, le proporzioni e magari anche le strutture e l'illuminazione, dato che esso deve produrre la sensazione dell'aspetto generale dell'edificio proposto. Ma questo richiamo estetico non può essere suddiviso per assegnarne un po' a una parte dell'edificio e un po' a un'altra. Nasce dai colori, dalle proporzioni e dalle relazioni spaziali fra le pareti, dalle aree circostanti e dagli edifici vicini. È ciò che viene chiamato una "proprietà emergente". Ora, si pensi all'idea che sta alla base del modellino dell'architetto. Il suo scopo è aiutare la valutazione estetica dell'edificio, nell'ipotesi che l'estetica dipenda da un ristretto numero di proprietà elementari dell'edificio (come i colori, o la struttura), le quali interagiscono producendo il risultato. Se il modello riproduce tutte le principali proprietà elementari e le loro interazioni, allora ci si può attendere che l'aspetto del modello (la sua proprietà emergente) possa servire da guida per la valutazione estetica dell'edificio (quale sarà al vero).

In Fig. 1 questo ragionamento è tradotto in un diagramma strutturale. La casella superiore, 1P, rappresenta ciò di cui bisogna costruire il modello, cioè il prototipo (nell'esempio fatto, l'edificio con ciò che lo circonda). Le caselle 2P e 3P rappresentano rispettivamente le principali proprietà elementari del prototipo e le interazioni fra di esse. La casella 4P rappresenta le principali proprietà emergenti, ovvero il comportamento che interessa far vedere. La freccia che va dalla casella 2P alla 4P attraverso la 3P rappresenta la via

Fig. 1

I principali passi sulla via della realizzazione di un modello.



attraverso la quale le principali caratteristiche e le loro interazioni producono le proprietà emergenti, ovvero il comportamento. Le frecce a senso unico che scendono dalla casella 'prototipo' a quelle immediatamente inferiori mostrano che le caselle 2P, 3P e 4P non dicono tutto sul prototipo, ma solo le caratteristiche 'di rilievo'.

La metà inferiore del diagramma rappresenta, in modo analogo, il modello. Le caselle 1M, 2M, 3M e 4M rappresentano rispettivamente il modello, le sue principali proprietà elementari, le loro interazioni ed il comportamento emergente del modello.

C'è anche qui una connessione a senso unico che dagli elementi del modello sale alle caselle 2M, 3M e 4M che racchiudono gli elementi determinanti agli scopi che si prefigge il modello. Le connessioni fra 2P e 2M, 3P e 3M, 4P e 4M rappresentano quelle che chiameremo 'relazioni di modello'. Esse mettono in corrispondenza il modello con il prototipo e sono bidirezionali, in quanto i contenuti delle caselle 2P, 3P e 4P determinano quelli delle caselle 2M, 3M, 4M e viceversa.

Si può ora vedere come questo diagramma si adatta al modello dell'architetto. Il prototipo è l'edificio proposto con i suoi dintorni (1P). La proprietà emergente che interessa è l'estetica del prototipo (4P): si è supposto che questa dipenda dai colori e dalle strutture (2P), come appaiono all'esterno, e dalle loro reciproche relazioni spaziali. Tutto ciò solo per il prototipo.

La relazione di modello scelta per il colore esterno (collegamento 2P → 2M) è quella di esatta corrispondenza (qui è irrilevante accertare se ciò sia o no facile da ottenere). Questa relazione, conoscendo i colori (2P) scelti per l'edificio, determina quelli (2M) del modello. La relazione di modello per i rapporti spaziali è la scala delle dimensioni (collegamento 3P → 3M), mediante la quale le dimensioni dell'edificio (3P) determinano quelle del modello (3M). Gli elementi del modello (2M) contribuiscono, attraverso le loro interazioni (3M), a produrre l'effetto estetico del modello (4M), che attraverso la relazione di modello 4M → 4P permette di ottenere la valutazione dell'estetica dell'edificio. La relazione rappresentata dal collegamento 4M → 4P non è sicuramente di esatta corrispondenza, né di rappresentazione in scala. Tuttavia è sufficiente per lo scopo del modello che deve essere soltanto una 'ragionevole guida'.

Se il modello viene approvato, l'architetto può sentirsi abbastanza sicuro della bontà del progetto, almeno per quanto riguarda l'aspetto. D'altra parte, se vi sono obiezioni, l'architetto può modificare il modello, anche più volte, se necessario, fino a che il cliente è soddisfatto. Questo lavoro può essere fatto prima di iniziare i lavori dell'edificio e prima ancora di pensare al progetto degli interni. Cambiando gli elementi del modello (2M) e le loro interazioni (3M), si otterrà un diverso effetto estetico, e così via fino a che non si è soddisfatti. Le relazioni di modello (2M → 2P e 3M → 3P) indicano come l'edificio dovrà essere costruito (2P e 3P), se si vuole che il suo aspetto (4P) corrisponda (4M → 4P) a quello del modello (4M).

Si spera che questi ragionamenti non abbiano instillato nel lettore l'idea che il modellino di un architetto racchiuda un pensiero tanto profondo. Si è solo cercato di fare, attraverso la Fig. 1, alcune utili considerazioni sui modelli, dimostrandone contemporaneamente l'utilità nel lavoro di progettazione. La progettazione è la funzione centrale della tecnologia e l'uso dei modelli ne è uno strumento essenziale. In questa applicazione assumono particolare importanza i seguenti aspetti:

a) il modello può essere costruito prima del prototipo e può essere modificato, con poca spesa, fino a ottenere una ragionevole previsione delle caratteristiche funzionali del prototipo;

b) sebbene molte delle proprietà di rilievo del prototipo possano influenzarne i vari aspetti funzionali, è possibile, attraverso l'impiego di più modelli del prototipo, ciascuno costruito per un particolare scopo, esaminare separatamente gli aspetti che interessano;

c) il procedimento di costruzione del modello, ottenuto componendo pezzo per pezzo le sue proprietà elementari e le loro immediate interazioni, facilita l'analisi dell'oggetto da modellare, permettendo di concentrare l'attenzione sulle sue proprietà fondamentali.

J. K. Galbraith afferma che questi aspetti, e le implicazioni che ne conseguono per le iniziative tecnologiche, contribuiscono alla formazione della struttura economica dell'industria moderna. Egli chiama queste implicazioni gli 'imperativi della tecnologia'.[1]

Il primo dei tre aspetti è stato illustrato attraverso il modellino dell'edificio costruito dall'architetto. Il secondo punto può essere chiarito passando alla problematica che le strutture dello stesso edificio pongono a un ingegnere civile, il quale, dovendo ricorrere a un modello, non baderà ai colori o alle rifiniture, bensì ai pesi e alla robustezza — che, d'altra parte, sono irrilevanti ai fini estetici ricercati dall'architetto. Questo secondo aspetto, assieme al terzo, giustifica lo sviluppo della specializzazione in tecnologia. Con il punto c) si entra nel campo dei problemi più complessi.

[1] Galbraith J. K., *Il nuovo stato industriale*, Einaudi, Torino ([2]1968).

Dall'affermazione che il tutto e più della somma delle sue parti (cioè che ha una più ampia gamma di possibilità di comportamento), segue che le parti sono più semplici del tutto. Costruendo i modelli di parti semplici e unendole in modo da riprodurre le interazioni più semplici, nel modello emergeranno anche interazioni più complesse. Se il modello è buono (secondo criteri che verranno esaminati più avanti) il suo comportamento complesso darà indicazioni e chiarimenti su ciò che si vuol progettare o capire.

A questo punto, dovrebbe essere chiaro come i modelli siano di vitale importanza in tecnologia. L'abilità di progettare e la capacità di comprendere miglioreranno imparando a sviluppare modelli sempre più sofisticati.

Prima di considerare i diversi tipi di modelli, è opportuno soffermarsi con alcune osservazioni 'filosofiche' sulla Fig. 1. Discutendo del modello dell'architetto, si era detto che i colori scelti per il prototipo avrebbero determinato quelli del modello. Ma è l'architetto ad effettuare la scelta, che va fatta prima che esista il prototipo. In un certo senso, si potrebbe affermare che l'idea che l'architetto ha del prototipo è essa stessa un modello. La Fig. 1 non pretende di spiegare i processi psicologici, ma può forse suggerire la via da seguire per pensare in modo efficace i problemi reali. Può essere interessante paragonare lo schema di Fig. 1 con le seguenti citazioni prese dal *Tractatus logico-philosophicus*[1] di L. Wittgenstein, opera che risale al 1918:

2.034 *La struttura del fatto consta delle strutture degli stati di cose.*
2.1 *Noi ci facciamo immagini dei fatti.*
2.12 *L'immagine è un modello della realtà.*
2.131 *Gli elementi dell'immagine sono rappresentanti degli oggetti nell'immagine.*
2.14 *L'immagine consiste nell'essere i suoi elementi in una determinata relazione l'uno all'altro.*
2.15 *Che gli elementi dell'immagine siano in una determinata relazione l'uno all'altro mostra che le cose sono in questa relazione l'una all'altra...*
2.1511 *L'immagine è così legata con la realtà; giunge ad essa.*
2.1514 *La relazione di raffigurazione consta delle coordinazioni degli elementi dell'immagine e delle cose.*
2.16 *Il fatto, per essere immagine, deve avere qualcosa in comune con il raffigurato.*
2.18 *Ciò che ogni immagine, di qualunque forma essa sia, deve avere in comune con la realtà, per poterla raffigurare — correttamente o falsamente — è la forma logica, cioè la forma della realtà.*

[1] Wittgenstein L., *Tractatus logico-philosophicus*, trad. it. di A. G. Conte, Einaudi, Torino ([2]1968), per gentile concessione dell'editore.

2.19 *L'immagine logica può raffigurare il mondo.*
2.222 *Nella concordanza o discordanza del senso dell'immagine con la realtà consiste la verità o falsità dell'immagine.*
2.223 *Per riconoscere se l'immagine è vera o falsa dobbiamo confrontarla con la realtà.*
2.224 *Dall'immagine soltanto non può riconoscersi se essa è vera o falsa.*
3 *L'immagine logica dei fatti è il pensiero.*

1.2 Le relazioni di modello

Il modello dell'architetto è, come si diceva all'inizio, uno dei più semplici. È molto simile a un giocattolo perché le convenzioni usate per rappresentare il prototipo (relazioni di modello) sono le stesse usate solitamente per i giocattoli. Esistono però altri tipi di relazioni di modello, spesso molto più utili in tecnologia. Esse sono l'oggetto di questo paragrafo.

1.2.1 Corrispondenza iconica. I modelli legati ai prototipi da corrispondenza iconica sono quelli ai quali si pensa normalmente quando si parla di modelli in senso generico. La corrispondenza iconica è la relazione di modello usata nei modellini giocattolo. Essa fa sì che una proprietà del prototipo (come la lunghezza di una parte) sia rappresentata dalla stessa proprietà nel modello (la lunghezza della parte corrispondente). Il risultato è, di solito, la riproduzione nel modello delle forme del prototipo (magari con qualche distorsione) e ciò fa sì che il modello assomigli al prototipo (da cui il nome, che deriva dalla parola greca *εἰκών* = immagine).

Se le lunghezze delle parti del modello sono ricavate dal prototipo usando la stessa scala non si avranno distorsioni. I modelli in scala sono largamente usati dagli ingegneri progettisti (ad esempio negli studi di aerodinamica, di comportamento delle fasce costiere e delle altre branche della tecnologia concernenti i fluidi). Mediante rapporti di scala si possono riprodurre velocità, forze, tempi e molte altre grandezze e proprietà fisiche. (Una descrizione dei metodi e dei criteri per ricavare modelli in scala si trova nel capitolo 8 MODELLI IN SCALA di questo stesso volume).

I rapporti di scala sono un tipico esempio di corrispondenza iconica, ma non sono gli unici di questo genere; vi si possono infatti includere l'eguaglianza dei colori o della composizione chimica, nonché le varie convenzioni usate in cartografia per la costruzione dì mappe. Queste sono, probabilmente, i più comuni modelli tra quelli basati sulla corrispondenza iconica, sebbene, come quasi tutti i modelli,

Fig. 2

Mappa della metropolitana di Londra nel contesto geografico della città.

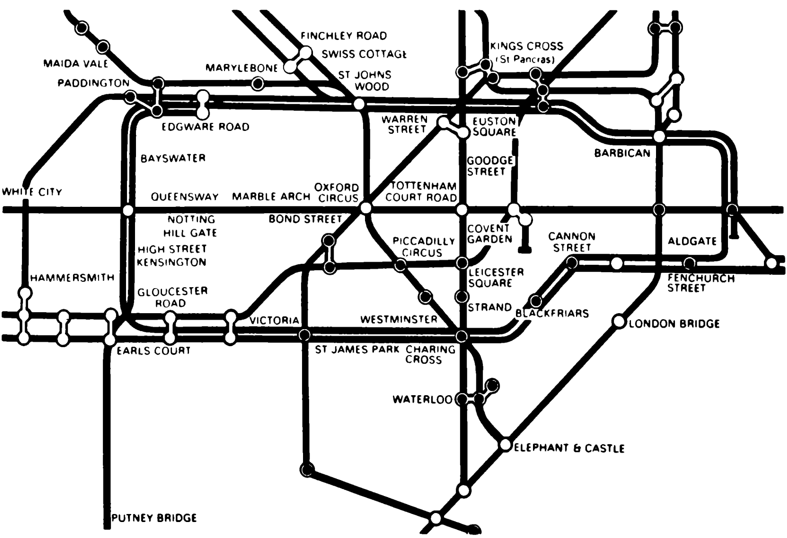
impieghino anche altri tipi di corrispondenze. È possibile rappresentare sulla carta aree di alcuni kilometri quadrati mantenendo un rapporto di scala praticamente costante fra le distanze misurate sulla mappa e quelle reali corrispondenti. La stessa operazione non è realizzabile per aree dello stesso ordine di grandezza della superficie terrestre (così come non si può avvolgere un foglio di carta attorno a un'arancia senza piegarlo). Per questo motivo, le carte geografiche di grandi superfici, pur rappresentando le distanze in corrispondenza iconica, o sono realizzate su superfici sferiche, o non hanno scale uniformi, il che distorce le proporzioni facendo magari apparire la Groenlandia più grande dell'Australia o deformando le distanze tra le diverse zone.

Si provi a confrontare la costruzione e l'uso delle mappe con lo schema di Fig. 1. Dall'osservazione di una mappa si possono ricavare molte più informazioni di quante il cartografo possa aver immaginato di includervi nel disegnarla.

Una considerazione importante è illustrata dalle due mappe della metropolitana londinese. La prima (Fig. 2) contiene molte più informazioni della seconda (Fig. 3) e potrebbe essere usata anche per scopi che nulla hanno a che vedere con la metropolitana stessa. Tuttavia la seconda risulta molto più facile da consultare, per chi già stia viaggiando in metropolitana e desideri solo sapere che linea prendere per poter raggiungere una certa stazione. Questa mappa, infatti, rappresenta solo le stazioni e gli incroci delle varie linee. Per i suoi fini limitati risulta perciò migliore dell'altra, in quanto è stata depurata da quasi tutte le informazioni superflue. Si può quindi affermare che la mancanza di semplificazioni in un modello può talvolta impedirne il buon uso o perlomeno ridurne l'efficacia (sulla base di queste considerazioni, il lettore potrà scusare qualche eccesso di semplificazioni che gli sembrasse di riscontrare in questo volume: qui non si è voluto dare una panoramica completa dei tipi di modelli possibili, ma far comprendere nel modo più efficace come si costruisce mentalmente un modello, e con quali criteri).

Fig. 3

Mappa semplificata della metropolitana di Londra.



1.2.2 Corrispondenza per analogia. Una mappa può rappresentare le distanze per corrispondenza iconica; ma volendo rappresentare anche le altezze rispetto al livello del mare, bisognerebbe realizzarla in rilievo. Un modo per aggirare l'ostacolo senza ricorrere al rilievo è quello di usare una scala di colori per tradurre la scala delle altezze. Una volta fissato il colore dei punti della mappa che corrispondono a una certa altezza sul livello del mare, i punti più elevati saranno rappresentati da un colore più intenso, e così via.

La relazione di modello per la quale una proprietà del prototipo (come l'altezza) viene fatta corrispondere nel modello a un'altra diversa proprietà (l'intensità del colore) è detta 'per analogia'. Questa utilissima corrispondenza verrà spesso utilizzata in questo volume. Nelle carte geografiche essa serve per rappresentare non solo i rilievi, ma anche grandezze di altra natura come le medie annuali delle precipitazioni, le temperature medie mensili, la densità di popolazione, nonché per proprietà non quantificabili come i regimi alimentari o il tipo di rocce affioranti nelle diverse regioni.

In molte mappe, la corrispondenza per analogia è usata in modo incompleto. Sebbene le proprietà da rappresentare con i colori cambino con continuità da un luogo all'altro, spesso i colori che le rappresentano mutano bruscamente intensità passando da zona a zona. Da una mappa del genere si potranno quindi ricavare informazioni affette da una certa imprecisione; per esempio, che la media annuale delle precipitazioni su Milano è fra 1000 e 1500 mm. Questo sfruttamento incompleto delle possibilità offerte dalla

Fig. 4

Grafico che illustra la deformazione di una trave sotto l'azione di una forza o carico .

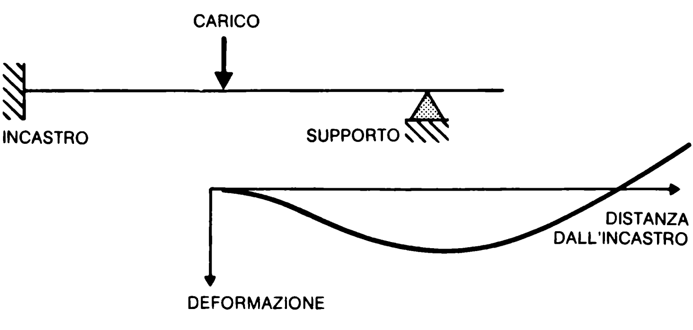
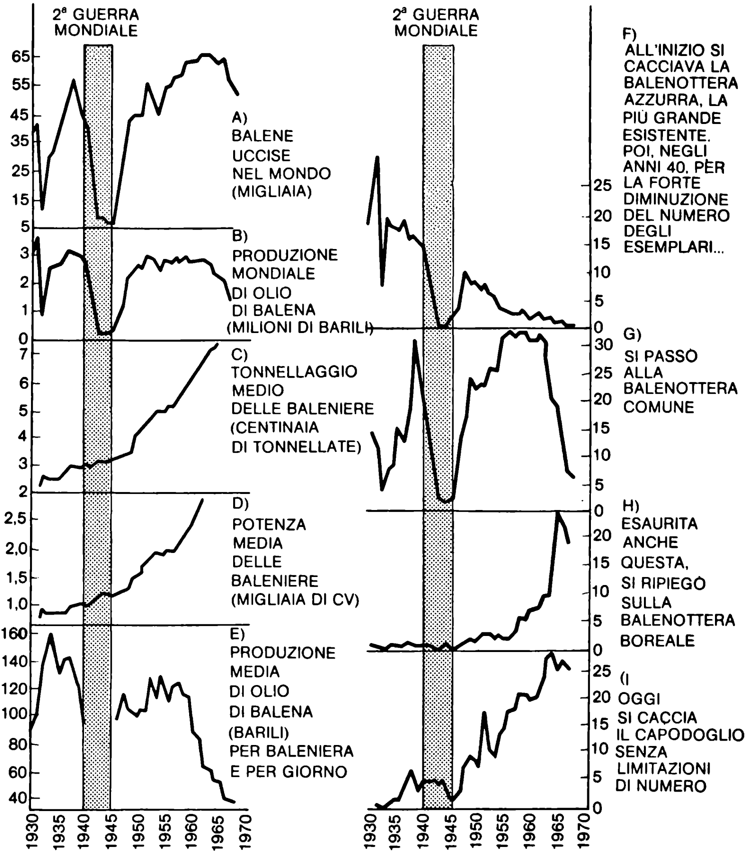


Fig. 5

Evoluzione della caccia alla balena, con progressivo sovra-sfruttamento dei branchi delle diverse famiglie.



corrispondenza per analogia è indice di un problema più generale che interessa qualunque tipo di modello, e cioè quello di ottenere un compromesso fra la precisione dei dettagli e la complessità della realizzazione, che ne fa aumentare i costi. Disegnare una mappa con variazioni continue di colore è difficile e costoso; e inoltre, a chi può interessare conoscere le precipitazioni medie con una tolleranza (cioè con un margine di approssimazione) che sia inferiore ai 250 mm? Un modello approssimato è spesso più che sufficiente per moltissimi scopi.

Un altro impiego molto comune della corrispondenza per analogia è costituito dai diagrammi. In essi le distanze verticali ed orizzontali di un punto dagli assi possono rappresentare, in scala, qualsiasi grandezza. In casi particolari, anche un diagramma può essere visto come modello elementare, e ciò accade quando gli assi rappresentano in scala lunghezze o distanze. Ad esempio il diagramma di Fig. 4 rappresenta le deformazioni di una trave incastrata che regge un carico. Questo grafico è ottenuto rappresentando in corrispondenza dei punti della trave, individuati dalla loro distanza dall'incastro, i piccoli spostamenti verticali subiti (naturalmente con una scala più dilatata).

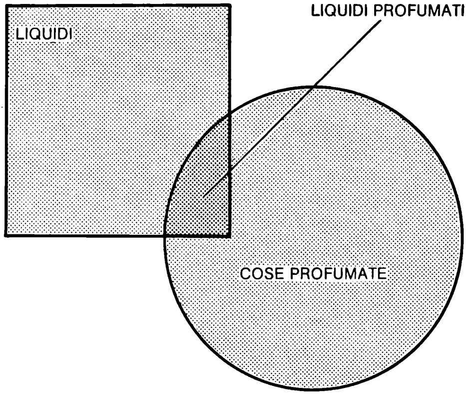
I grafici sono un buon esempio della corrispondenza per analogia e sono molto utili per riassumere informazioni. Essi però agiscono da modelli solo quando mettono in risalto certe caratteristiche che sono già contenute nelle informazioni che servono per costruirli.

Un esempio familiare è l'uso dei grafici per tentare di ricavare previsioni. In Fig. 5 l'asse orizzontale rappresenta i tempi (e prosegue idealmente nel futuro). Un'osservazione interessante su questa figura è che l'interazione fra i vari grafici, quando li si esamina in blocco, dà più informazioni di un esame separato. In questo senso la Fig. 5 si comporta proprio come dovrebbe un modello.

Tracciare disegni su un foglio di carta è assai semplice: per questo, è stato sviluppato un gran numero di analogie

Fig. 6

Un'analogia grafica non quantitativa.



grafiche. Le varie proprietà o grandezze sono spesso rappresentate, oltre che da lunghezze di segmenti, anche da aree di rettangoli o di altre figure.

Si è detto 'proprietà o grandezze' poiché in molte utili analogie le aree sono usate in modo non quantitativo per indicare proprietà tipicamente qualitative come l'essere liquido o l'essere profumato. Ad esempio se il quadrato di Fig. 6 racchiude tutte le cose liquide ed il cerchio tutte le cose profumate, la parte comune conterrà i liquidi profumati.

1.2.3 Rappresentazione simbolica. La rappresentazione simbolica è un altro tipo di relazione di modello usata nelle mappe. I simboli delle mappe sono di solito rappresentazioni convenzionali (di un ponte, ad esempio, o di una ferrovia) e le convenzioni per interpretarli sono fornite in un'opportuna leggenda. Tuttavia questo uso, seppure utile e necessario, è solo un piccolo esempio di rappresentazione simbolica. I simboli sono importanti soprattutto quando contribuiscono a rendere attivo il modello, ciò che è rappresentato in Fig. 1 nella progressione dai blocchi 2M e 3M al blocco 4M. Perché ciò sia reso possibile, ai simboli devono essere associate delle regole per manipolarli.

Il sistema che tutti usano nella conversazione ordinaria per 'manipolare' i simboli è il ragionamento, visto come contrapposizione alla poesia ed alla retorica. Questo è proprio il tipo di manipolazione che interessa i modelli. Sebbene, in pratica, il ragionamento abbia solo pochi punti in comune con la logica classica aristotelica, lo si può schematizzare, in modo un po' brutale, con il seguente tipo di svolgimento:

PREMESSE
↓
REGOLE DI INFERENZA
↓
CONCLUSIONI

Questo schema assomiglia ai passaggi 2M-3M-4M di Fig. 1. Modelli verbali sono usati in molte delle scienze che non necessitano di quantificare i concetti. La loro debolezza risiede nell'incapacità di risolvere problemi che risultano da tendenze contrastanti.

Il sistema più largamente usato per quantificare i simboli è l'insieme dei caratteri numerici (2 e II rappresentano lo stesso numero; un numero non è di per sé un simbolo). I numeri vengono usati come rappresentazioni analogiche di qualsivoglia grandezza misurabile, cosicché i modelli numerici costituiscono un grosso passo avanti rispetto a quelli verbali. Per illustrare i modelli numerici, si pensi al problema di trovare l'area di un campo. Il metodo più primitivo fu probabilmente quello di ricoprire il campo con pelli di bue e quindi contarle. Questa operazione non implicava la nozione di modello, poiché faceva uso della primitiva nozione di area. Si tratta di un metodo eccellente e quasi a prova di errore (lo si ritroverà, in versione un po' diversa, più avanti). Un bel giorno, probabilmente, qualcuno si accorse che, se il campo era rettangolare, le pelli di bue lo ricoprivano in righe diritte, cosicché era sufficiente contare le pelli di due lati adiacenti del campo. Costui aveva inventato il modello mostrato in Fig. 7. Come tutti i buoni modelli, questo deve aver contribuito a un notevole risparmio in tempo e in materiali. (È noto che gli Egizi adattarono erroneamente lo stesso modello a campi a forma di parallelogramma. Come controllare i modelli è materia di cui si parlerà più avanti.)

I modelli aritmetico-verbali, sebbene molto utili, sono costituiti da espressioni poco maneggevoli. Per esempio, a scuola si impara una semplice regola per calcolare l'area del triangolo (Fig. 8) e tante altre regole dello stesso tipo espresse principalmente a parole. Di qui ad adottare e definire abbreviazioni del tipo $A = BH/2$ dove A è l'area del triangolo, B la lunghezza della base, H l'altezza misurata perpendicolarmente alla base, il passo è breve.

Naturalmente in questa formula vi è scritto più di quanto sia contenuto nella Fig. 8. Però ogni altra successiva affermazione sull'area del triangolo, o sulla sua base o sulla sua altezza, può essere espressa in maniera molto più concisa usando le lettere invece delle loro ingombranti equivalenti espressioni verbali. (Chi a questo punto non si sentisse a proprio agio, legga i capitoli 2, 3, 4 e 5).

Nella storia della fisica vi sono casi famosi di modelli

Fig. 7

Un modello che consente di migliorare l'efficienza della misurazione dell'area di un campo con pelli di bue.

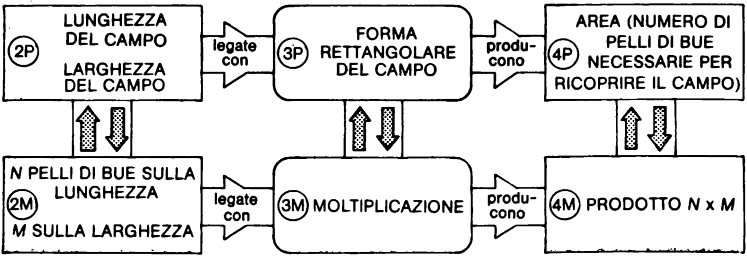


Fig. 8

L'AREA DEL TRIANGOLO	=	UN MEZZO	×	LA SUA BASE	×	LA SUA ALTEZZA

sviluppati con l'aiuto di strumenti matematici, che non erano mai stati applicati in precedenza e che erano, stranamente, pronti, quasi 'al varco'. Ma il servizio più ordinario, e non per questo meno vitale, reso dalla matematica alla costruzione dei modelli è l'aiuto che dà per ricavare elaborate conseguenze, a partire da ipotesi che sono abbastanza semplici per poter essere afferrate direttamente In altre parole, se il contenuto dei riquadri 2M e 3M di Fig. 1 fosse espresso in simboli matematici, ci sarebbe probabilmente un algoritmo già pronto, per passare al riquadro 4M.

1.2.4 Sommario delle relazioni di modello. Per ricapitolare: una proprietà del prototipo può essere rappresentata nel modello dalla stessa proprietà (in modo iconico), da una proprietà diversa (in modo analogico) o infine mediante un simbolo (in modo simbolico). Questa classificazione è utile, poiché mostra come, in oggetti apparentemente diversi come il modellino di una casa, una carta geografica, un'equazione matematica, possa essere ravvisato lo schema di Fig. 1. Questa classificazione non pretende di essere completa né di servire per ulteriori deduzioni. È solo un aiuto per riordinare le idee sui modelli.

1.3 Quando un modello non è più tale?

La Fig. 1 è servita per definire un modello. Sembrerebbe perciò che, per decidere se un oggetto possa o meno essere considerato modello di un altro, sia sufficiente vedere se le relazioni reciproche sono proprio quelle schematizzate. Questo metodo funzionava bene per le mappe, ma solo perché si trattava di un esempio particolare.

La mappa di un quartiere non serve a chi conosce il quartiere abbastanza a fondo per poter dire se la mappa stessa ne è la corretta rappresentazione in ogni dettaglio, ma sarà d'aiuto a chi, per il motivo stesso di aver bisogno della mappa, non può giudicarne la bontà. Chi si trova in queste condizioni ha come unico metro, per valutare la bontà di una mappa, il rapporto fra il numero di volte che questa gli fa

Fig. 9

Diagramma di circolazione dell'economia, secondo J.M. Keynes.

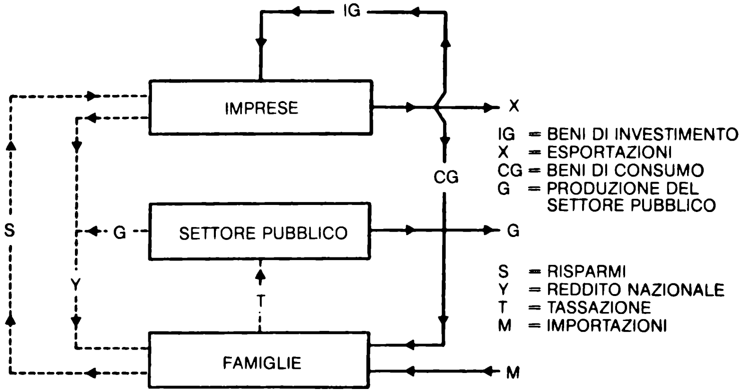
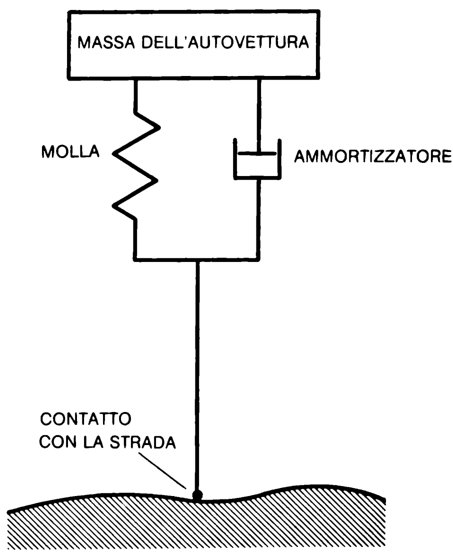


Fig. 10

Modello concettuale del sistema di sospensione di un'auto-vettura.



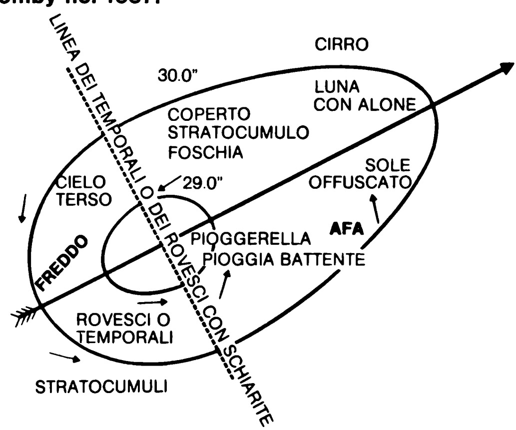
perdere la strada ed il numero di volte che lo aiuta a ritrovarla.
Egli potrebbe anche accorgersi che, mentre raramente sbaglia in una zona, in altre ha più incertezze. Naturalmente potrebbe, per poter dare un giudizio, rivolgersi a qualcun altro che ha già valutato più mappe dello stesso quartiere. La relazione fra tecnologia e scienza è simile a quella fra chi desidera pianificare un percorso e chi ha raccolto e controllato molte mappe di un quartiere.

La stessa cosa accade con i modelli in genere. Non ci si deve chiedere «È questo un modello di quest'altro?», aspettandosi un «Sì» o un «No», ma «Questo modello è abbastanza adatto allo scopo che ci si prefigge?». Si chiamano pseudomodelli quelli che non rientrano in ogni dettaglio nello schema di Fig. 1. Spesso è solo nel linguaggio dei modelli che si può parlare di prototipo.

Nell'affrontare un problema, si inizia di solito con modelli descrittivi o concettuali e si prosegue, quando possibile, verso modelli più quantificati in modo da aumentare le informazioni che se ne possono trarre. Un modello concettuale può consistere in poco più di una proposta riguardante gli elementi che costituiranno il modello e quelli

Fig. 11

Il modello, ormai famoso, di una depressione atmosferica, pubblicato da R. Abercromby nel 1887.



fra essi di cui si studieranno le interazioni.Due esempi di questo tipo sono mostrati nelle Figg. 9 e 10. Il primo è preso da un testo di economia, il secondo da uno studio tecnologico in fase iniziale (il progetto delle sospensioni di un'automobile). La Fig. 11 mostra un modello descrittivo elaborato in meteorologia (quando questa scienza era agli albori). Esso illustra un sistema rudimentale di previsione, nel presupposto che l'osservazione di alcuni eventi di un particolare gruppo permetta di ricavare gli altri tramite le frecce direzionali del modello.

Riassumendo, la Fig. 1 descrive la struttura logica di un modello perfetto. Di solito non si può essere sicuri che ciò che viene chiamato modello sia in conformità con questa descrizione. I modelli saranno quindi buoni, cattivi o discreti a seconda dell'esperienza di chi li usa. Un modello può essere sufficiente per uno scopo e inaccettabile per un altro.

2 Un ostacolo facilmente superabile

Nel suo libro *Plain words*, Ernest Gowers, discutendo della difficoltà di attribuire un significato preciso ai termini usati nei testi legali, scrive: «... le parole sono uno strumento imperfetto per esprimere concetti complicati senza dare adito a dubbi; soltanto la matematica può essere sicura di riuscirvi». Questa osservazione è vera in un contesto ben più ampio di quello considerato da Gowers. Per esempio, si immagini di dover rispondere alla domanda: «Quanto è più stretta la seconda curva della strada rispetto alla terza?». Qualunque risposta data senza usare numeri non sarebbe di grande aiuto per un ingegnere civile che dovesse disegnarne i margini. La precisione che può offrire la matematica è inestimabile per la tecnologia.

Le poche notazioni di matematica presenti in questo volume sono alla portata di chiunque sia in possesso delle nozioni scolastiche elementari d'algebra. I prossimi capitoli si rivolgono a coloro che hanno poca memoria e a coloro che si sentono in alto mare quando incontrano simboli matematici.

Per chi rientra in quest'ultimo gruppo, la prima cosa da capire è che acquisire dimestichezza con i simboli matematici è molto simile a imparare a nuotare. Non è difficile e non richiede un'intelligenza superiore. Il requisito principale è la fiducia, quanto basta a soffocare la crescente sensazione di panico e rimanere calmi, mentre si sollevano i piedi dal fondo sicuro del linguaggio corrente, scoprendo che si è in grado almeno di galleggiare. La difficoltà di trovare coraggio aumenta quanto più si tenta di convincere sé stessi che non si sarà mai in grado di galleggiare. Infatti, quando uno ha scoperto di saper galleggiare non è necessario insegnargli a nuotare; tutto ciò di cui ha bisogno è di imitare gli altri e di tentare di tanto in tanto nuovi movimenti. Lo stile, se lo si vuole, potrà essere perfezionato più tardi.

3 Non ci si rende conto di quanto già si sa

Indiscutibilmente, l'aritmetica può essere molto noiosa; e tuttavia, la maggior parte della gente si arrangia bene con tutti i calcoli che incontra nelle attività quotidiane. L'avversione nei confronti della matematica («Io la matematica non la capisco») non è giustificata, in quanto una delle sue caratteristiche più importanti è quella di non richiedere quasi mai tediosi calcoli numerici: matematici, ingegneri e scienziati spesso detestano, almeno come chiunque altro, farvi ricorso. Molte delle notazioni e operazioni che si vedranno in seguito, essendo prive di complicazioni aritmetiche, non richiedono, per essere capite, uno sforzo superiore a quello necessario per fare il conto della spesa o per misurare una pezza di stoffa. Per esempio, è facile vedere che la spesa totale per imbiancare una stanza comprende due voci: materiale e manodopera, essendo il costo del materiale pari a un tanto al kilogrammo, per tanti kilogrammi di tinta necessari, e il costo della manodopera pari ad un tanto all'ora per il numero di ore impiegate dall'imbianchino. Una volta noti la quantità di tinta, il tempo necessario per il lavoro, il costo di un kilogrammo di tinta e la paga oraria dell'imbianchino, resta soltanto la seccatura di usare l'aritmetica. Ma rileggendo attentamente la penultima frase, ci si accorgerà che il problema è già stato enunciato in termini algebrici, in quanto le espressioni 'un tanto' e 'tanti' o 'tante' traducono gli stessi concetti che in algebra sono simboleggiati dalle lettere, cioè in forma generale, non quantitativa.

Così si può giungere alla notazione algebrica riscrivendo la frase con qualche piccola modifica: «... la spesa totale (indicata con C) comprende due voci, materiale e manodopera, essendo il costo del materiale (indicato con M) pari ad un tanto (indicato con t) al kilogrammo per tanti (indicati con T) kilogrammi necessari, e il costo della manodopera (indicato con L) pari ad un tanto (indicato con h) all'ora per il numero di ore (indicato con H) impiegate dall'imbianchino».

Queste modifiche hanno semplicemente lo scopo di distinguere i vari 'un tanto', e 'tanti' o 'tante',

linguaggio algebrico

mentre le altre indicano come devono essere trattate queste grandezze (operando su di esse con somme o moltiplicazioni).

La traduzione in linguaggio algebrico si completa come risulta dalle relazioni seguenti:

$$C = M + L \qquad (1)$$
$$M = Tt \qquad (2)$$
$$L = Hh \qquad (3)$$

dove:

C è il costo totale (in lire);
M è il costo del materiale (in lire);
L è il costo del lavoro (in lire);
T è la quantità di tinta (in kilogrammi);
t è il costo in lire di un kilogrammo di tinta;
H è il numero di ore di lavoro dell'imbianchino;
h è la paga oraria dell'imbianchino (in lire).

È da notare:

– l'uso normale dei segni + e =, come in aritmetica;
– non viene usato alcun segno per la moltiplicazione; la moltiplicazione di due grandezze è sottintesa quando non esiste segno tra le due;
– sebbene ogni singola lettera rappresenti un numero di qualcosa (lire, kilogrammi di tinta, ore), non è necessario usare l'aritmetica;
– le lettere usate per rappresentare le grandezze possono essere scelte secondo un qualunque criterio. Per questo esempio si è fatto in modo che le lettere avessero un richiamo mnemonico alle iniziali delle grandezze rappresentate. Ciò, però, non è sempre possibile, e d'altra parte è di scarsa importanza, a patto di far seguire alle equazioni il relativo elenco delle definizioni.

Riguardo questo esempio si deve ammettere, primo, che la maggior parte della gente è in grado di formulare o capire facilmente la descrizione verbale del problema e, secondo, che il metodo algebrico è più semplice e più chiaro. Si noti che, siccome il problema poteva essere chiaramente descritto a parole (in quanto noto in tutti i suoi aspetti), era già implicita la possibilità di tradurlo in termini algebrici.

4 Notazioni algebriche

4.1 Operazioni e passaggi aritmetici

Prima di sollevare il problema di come manipolare i simboli, è opportuno concludere il discorso sulle quattro operazioni aritmetiche: somma, sottrazione, moltiplicazione e divisione. L'esempio precedente della imbiancatura può fornire l'occasione anche per trattare la sottrazione e la divisione. Supponendo che il conto del lavoro sia presentato con le sole indicazioni del costo totale, del costo del materiale e del tempo necessario, il costo del lavoro si può calcolare deducendo dal costo totale il costo del materiale:

$$L = C - M. \tag{4}$$

La paga oraria dell'imbianchino può essere ricavata dividendo il costo del lavoro per il numero di ore necessarie:

$$h = \frac{L}{H}. \tag{5}$$

Quest'equazione dice che h è uguale a L diviso per H, e ciò viene rappresentato ponendo il numero da dividere (dividendo) sopra una linea orizzontale, e il numero per il quale deve essere fatta la divisione (divisore) al di sotto della stessa. Il risultato si chiama quoziente, e, quando viene rappresentato in questo modo, il dividendo si chiama numeratore e il divisore denominatore. Talvolta,

numeratore e denominatore

per risparmiare spazio o per semplificare la battitura a macchina, la divisione è indicata dal numeratore seguito da un tratto obliquo, seguito a sua volta dal denominatore:

$$h = L/H.$$

Non c'è altro da dire sulle operazioni aritmetiche elementari, eccetto un paio di termini utili: il risultato di una addizione di due o più numeri è chiamato somma, e quello di una moltiplicazione di due o più numeri prodotto.

L'uso della notazione algebrica non è solo vantaggioso ai fini della concisione, ma permette anche di trasformare facilmente le stesse equazioni in modo che esprimano il loro contenuto nella maniera più conveniente. Per esempio, l'equazione (4):

$$L = C - M$$

può essere ottenuta dall'equazione (1):

$$C = M + L$$

sottraendo M da entrambi i membri. Da questa operazione si ottiene $C - M$ a sinistra e $M + L - M$ a destra, e poiché

$$M - M = 0,$$

il membro di destra vale appunto L. Il fatto che L fosse a sinistra nell'equazione (4) non ha alcuna importanza, perché, scambiando di posto i membri di una equazione, non si muta il risultato.

Nel seguito si incontreranno parecchi artifici per operare con i simboli, ma si cercherà sempre di guidare il lettore al loro uso. Ciò che si raccomanda è di concentrarsi su quanto man mano verrà spiegato, approfittando dell'abbondanza di dettagli e degli eventuali riferimenti ai concetti già esposti. (Non si trascuri di tornare ai capitoli precedenti, qualora un passaggio non sia completamente chiarito.) Capiterà, pur riuscendo a seguire un ragionamento, di temere o di non riuscire a ricordarlo, o di non riuscire a ricavarlo da soli: non c'è da preoccuparsene, poiché tutto questo verrà in seguito, man mano che si prenderà confidenza con i vari concetti.

La manipolazione delle equazioni è spesso più comprensibile, se si ragiona come segue: il membro di destra e il membro di sinistra sono equivalenti e rappresentano

manipolazione delle equazioni

esattamente la stessa quantità, anche se la esprimono in modi diversi. Quindi, fin tanto che si eseguono le stesse operazioni su entrambi i membri, la loro equivalenza si mantiene, in quanto essi vengono modificati della stessa quantità da entrambe le parti. Per esempio, dall'equazione (3):

$$L = Hh$$

dividendo entrambi i membri per H si ottiene:

$$\frac{L}{H} = \frac{Hh}{H}. \tag{6}$$

Al secondo membro si vede che h deve essere moltiplicato per H e il risultato a sua volta diviso per H, il che equivale chiaramente ad h, cioè:

$$\frac{L}{H} = h$$

ovvero l'equazione (5) che già si era ottenuta. L'operazione fatta può essere vista come eliminazione di H dal numeratore e dal denominatore (semplificazione)

semplificazione

nel secondo membro dell'equazione (6). Ciò significa che dividendo un numero per sé stesso si ottiene sempre l'unità:

$$\frac{H}{H} = 1$$

(con l'eccezione di $H = 0$, caso che verrà trattato più avanti) dal momento che:

$$1H = H \tag{7}$$

poiché qualsiasi numero resta invariato se moltiplicato per 1 (questa è anche una definizione del numero 1, del tutto rigorosa e insieme di carattere immediatamente intuitivo).

4.2 Un numero eccezionale: lo zero

Si è appena detto che nel caso dello zero si deve fare un'eccezione a una regola altrimenti generale. Lo zero è un numero veramente eccezionale. Un numero non cambia se gli viene aggiunto o sottratto lo zero:

$$a+0=a-0=a; \tag{8}$$

ma qualunque numero moltiplicato per zero dà, come risultato, zero:

$$a0=0. \tag{9}$$

Inoltre, se più numeri moltiplicati fra di loro danno come risultato zero, si può sempre affermare che uno dei numeri stessi era zero. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che la moltiplicazione fra due numeri qualunque, nessuno dei quali è zero, deve dare un risultato diverso da zero. Così, per esempio, se:

$$abcd=0 \tag{10}$$

allora uno o più dei fattori *a, b, c* e *d* devono annullarsi. Da notare che non si è detto cosa rappresentano *a, b, c* e *d.* Questo perché le deduzioni fatte, essendo di carattere assolutamente generale, non dipendono da quello che le lettere rappresentano. Non c'è alcuna ragione di supporre una qualsiasi connessione tra la *a* nell'equazione (8) e la *a* dell'equazione (9), o tra queste e la *a* dell'equazione (10), anche se naturalmente deve trattarsi della stessa *a* in tutti e tre i membri dell'equazione (8), concatenati nello stesso ragionamento.

L'eccezione di gran lunga più importante da osservare in presenza dello zero è che esso non può essere usato come divisore. Spieghiamone la ragione con un esempio: si supponga che qualcuno dica di aver raccolto 7500 lire vendendo biglietti della lotteria a 500 lire l'uno. Dividendo il ricavo per il prezzo del biglietto, si può calcolare il numero di biglietti venduti. Ma supponiamo che egli dica di aver distribuito i biglietti senza incassare denaro, di quanti biglietti disponeva? Chiaramente la risposta è: «Un numero qualsiasi». Ciò significa che non c'è una risposta definitiva; in linguaggio matematico si direbbe 'la divisione per zero è indefinita', intendendo con ciò che non deve assolutamente essere eseguita

4.3 La sostituzione

Tornando all'esempio del costo dell'imbiancatura di una stanza, si erano ottenute le seguenti equazioni:

$$C=M+L \tag{1}$$

$$M=Tt \tag{2}$$

$$L=Hh. \tag{3}$$

Poiché la *M* dell'equazione (1) è identica in valore e significato alla *M* che appare nell'equazione (2), è possibile utilizzare l'informazione contenuta in quest'ultima per sostituire *M* nell'equazione (1) con *Tt*. Similmente l'equazione (3) permette di sostituire *L* nell'equazione (1) con

Hh. Eseguendo entrambe le operazioni, si ottiene:

$$C = Tt + Hh. \qquad (11)$$

Questo procedimento è chiamato sostituzione. Poiché in un'equazione il membro di destra e quello di sinistra hanno sempre ugual valore, essi possono essere sostituiti in ogni momento con espressioni tratte da altre equazioni (purché riferite allo stesso problema). Questa regola è la più utile di tutte nella manipolazione di espressioni matematiche. Essa va sempre usata al momento di trovare la risposta numerica al problema già risolto algebricamente.

Le grandezze che appaiono nel problema dell'imbiancatura potrebbero avere i seguenti valori:

$$T = 8 \qquad t = 0{,}30$$
$$H = 12 \qquad h = 1{,}25$$

i quali, sostituiti nell'equazione (11), permettono di ricavare il costo totale *C*. A questo punto è opportuno utilizzare nuovamente il segno di moltiplicazione, per evitare confusione tra numeri adiacenti:

$$C = 8 \times 0{,}30 + 12 \times 1{,}25 = 2{,}4 + 15 = 17{,}4.$$

4.4 La parentesi

Finora si è avuto a che fare con espressioni che non contenevano più di un riferimento a operazioni matematiche, come Tt o L/H (l'espressione al secondo membro dell'equazione (11), pur contenendo un'addizione e due moltiplicazioni, non è stata affatto manipolata).

Spesso capita di dover eseguire una delle operazioni principali fra grandezze un po' più complesse. Si supponga, per esempio, di dover stimare quanti kilogrammi di tinta sono necessari per imbiancare le pareti di una stanza rettangolare. Occorre quindi sapere che area si può coprire con 1 kg di tinta e qual è l'area della camera. Per calcolare quest'ultima, si ponga:

A = superficie delle pareti della stanza (in metri quadrati);

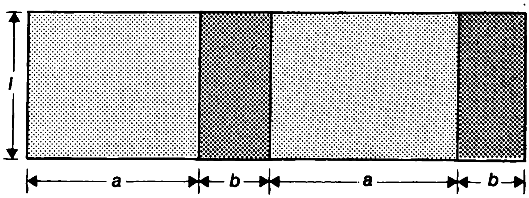
l = altezza della stanza (in metri);

a = lunghezza della stanza (in metri);

b = larghezza della stanza (in metri).

(Occorre fare attenzione nella scelta delle lettere per rappresentare le grandezze in gioco. Ad esempio, se si usa la lettera *l* per l'altezza, la stessa lettera non può essere usata per la lunghezza che dovrà chiamarsi ad esempio *a*. Questo non dovrebbe comportare difficoltà insormontabili, in quanto il significato di una lettera non è di alcuna importanza nella manipolazione, e, in ogni caso, va sempre riportata una lista come quella sopra.)

Fig. 12



Per calcolare A, si immagini di sviluppare le pareti come mostrato in Fig. 12. Il rettangolo che si ottiene è di altezza l e base $b + a + b + a$, o più brevemente $2a + 2b$, e la sua area si ottiene moltiplicando la base per l'altezza. Ci sono due modi per calcolare il risultato. Il primo è quello di moltiplicare separatamente per l'altezza i due termini dell'espressione che rappresenta la base e quindi sommarli:

$$A = 2la + 2lb. \qquad (12)$$

(Da notare che la l è stata inserita in mezzo ad ogni termine. L'ordine dei fattori, cioè dei numeri che sono da moltiplicare

ordine dei fattori

fra di loro, non cambia il valore del prodotto; per esempio, 3 x 4 x 7 corrisponde esattamente a 7 x 3 x 4. Ma in algebra si usa scrivere i fattori numerici per primi, quando essi compaiono frammisti a lettere.)

L'equazione (12) afferma che l'area totale è uguale a due volte l'area di una parete laterale più due volte l'area di una parete frontale: questo è uno dei modi di vedere il problema.

Il secondo modo di calcolare il risultato è di vedere A come prodotto di l per $2a + 2b$. Per indicare che $2a + 2b$ deve essere trattato come un singolo fattore in questo prodotto, è necessario racchiuderlo tra parentesi:

$$A = l(2a + 2b). \qquad (13)$$

In questa espressione l'area è vista come l'altezza della stanza moltiplicata per il suo perimetro totale. Si ottiene lo stesso risultato per A, in entrambi i modi visti, purché:

$$2la + 2lb = l(2a + 2b). \qquad (14)$$

Da questa equazione si possono desumere alcune regole per l'uso delle parentesi.

Primo: se si hanno più termini, come i due a sinistra dell'equazione (14), con un fattore comune (in questo caso l), questo può essere separato (cioè raccolto) da ognuno di essi e scritto immediatamente prima di una parentesi, che contiene i termini stessi (privati del fattore comune). Mediante questa regola si può ricavare il secondo membro della equazione (14) a partire dal primo.

Esercizio. Si sarà probabilmente notato che anche il fattore 2 è comune ai due membri dell'equazione (14). Quale risultato si ottiene applicando la regola anche per il 2?

Risposta. $2/(a+b)$.

Secondo: se si ha un fattore al di fuori della parentesi, questa può essere eliminata moltiplicando ogni termine entro di essa per il fattore stesso. Con questa regola, si può ricavare il primo membro della equazione (14) a partire dal secondo.

Esercizio. Riscrivere le seguenti espressioni usando le parentesi:

a) $cd+ce$;
b) $cdf+2cd$;
c) $cdf+cd$;
d) $cdf+cgf+gdc$;
e) $cd+gd+ce+ge$ (suggerimento: considerate insieme la prima coppia di termini, quindi la seconda e poi cercate un fattore comune ai due termini così ricavati).

Risposta.

a) $c(d+e)$;
b) $cd(f+2)$;
c) $cd(f+1)$;
d) $c(df+gf+gd)$ che può essere sviluppato ulteriormente, e diventare $c[f(d+g)+gd]$, o $c[df+g(f+d)]$, o ancora $c[gf+d(f+g)]$;
e) $(c+g)(d+e)$.

Esercizio. Riscrivete le seguenti espressioni eliminando tutte le parentesi:

a) $3a(3b+1)$;
b) $15b(1/b+a/5)$;
c) $(2a+3b)(c+4d)$;
d) $3a[b+c(2d+b)]$.

Risposta.

a) $9ab+3a$;
b) $15+3ab$;
c) $2ac+3bc+8ad+12bd$;
d) $3ab+6acd+3acb$.

L'uso delle parentesi assicura che le operazioni aritmetiche vengano sempre eseguite nel corretto ordine. Se si moltiplica un numero per 5 e poi si somma 10, il risultato è diverso da quello che si ricava sommando prima 10 e moltiplicando poi per 5. L'uso delle parentesi evita queste possibili ambiguità.

Si supponga, quale ulteriore esempio, di avere un quoziente, per esempio N/D (N sta per numeratore e D per denominatore) e di volerlo dividere per un'espressione X. Sarebbe sbagliato scrivere semplicemente $N/D/X$, perché questo potrebbe significare sia $N/(D/X)$ che $(N/D)/X$, e solo quest'ultima è l'espressione desiderata (si provi a risolvere entrambe queste espressioni ponendo $N = 500$, $D = 10$, $X = 5$). Si osservi, però, che l'abuso delle barre oblique in una espressione del tipo $\{[(N/D)/X]/Y\}/Z$, crea difficoltà sia nella scrittura sia nell'interpretazione. C'è un modo molto più semplice. Indichiamo con R il risultato della divisione di N/D per X:

$$R = \left(\frac{N}{D}\right)/X.$$

Moltiplicando ora entrambi i membri per X si ottiene:

$$XR = \frac{N}{D}$$

da cui, moltiplicando nuovamente entrambi i membri per D:

$$DXR = N.$$

Ora entrambi i membri possono essere divisi per DX, ottenendo il seguente risultato:

$$R = \frac{N}{DX}.$$

A questo punto si può sostituire R con la formulazione già incontrata all'inizio:

$$\left(\frac{N}{D}\right)/X = \frac{N}{DX} \tag{15}$$

e si trova che, per dividere un quoziente per un'espressione, si deve moltiplicare il suo denominatore per l'espressione stessa. Dividere per X è lo stesso che moltiplicare per $1/X$ (dividere un numero per 10 equivale a moltiplicarlo per un decimo).

reciproci

X e $1/X$ sono chiamati reciproci l'uno dell'altro, poiché moltiplicandoli fra loro si ottiene 1. La reciprocità della relazione significa che X è il reciproco di $1/X$, cosicché dividere per $1/X$ equivale a moltiplicare per X.

Un quoziente è uguale al suo numeratore moltiplicato per il reciproco del denominatore:

$$\frac{N}{D} = N\left(\frac{1}{D}\right).$$

Ponendo $N = 1$ nell'equazione (15), che è vera per qualunque valore di N, si ottiene una regola per moltiplicare i numeri reciproci:

$$\frac{1}{X} \cdot \frac{1}{D} = \frac{1}{DX}.$$

Si osservi l'uso del punto per indicare la moltiplicazione. Esso talvolta migliora la chiarezza, ma può causare problemi quando nell'equazione compaiono costanti numeriche, perché si confonde facilmente con il punto decimale che, sempre più spesso, viene impiegato nelle notazioni scientifiche al posto della virgola, secondo l'uso inglese. Per lo stesso motivo si evita il segno 'per' (x), perché può essere confuso con la lettera x. Si suggerisce di non usare alcun segno per indicare la moltiplicazione, almeno fin quando non sia in gioco la chiarezza, e in tal caso di usare il punto. Qualora fossero presenti dei numeri con punto decimale, è opportuno che vengano racchiusi fra parentesi, evitando nel contempo che nelle stesse compaiano punti di moltiplicazione. Per evitare confusione, in caso di presenza di molte parentesi, si consiglia di usare correttamente tutti i tipi disponibili: $(a + b)$, $[a + b]$, $\{a + b\}$.

A questo punto dovrebbe essere chiaro che il risultato della moltiplicazione di più quozienti equivale al prodotto dei numeratori diviso per il prodotto dei denominatori. Ovunque si abbia a che fare con quozienti, ci si ricordi di applicare la regola della semplificazione dei fattori che compaiono sia al numeratore sia al denominatore. Il valore di un quoziente non cambia se entrambi, numeratore e denominatore, vengono moltiplicati o divisi per lo stesso numero o espressione purché diversi da zero.

4.5 Numeri negativi e segno meno

Se la persona che deve pagare la cifra C per l'imbiancatura della stanza disponesse di una cifra B_1 in banca, si potrebbe calcolare la cifra B_2 che le rimarrà dopo il pagamento nel seguente modo:

$$B_2 = B_1 - C.$$

Anche i simboli B_1 e B_2 rappresentano delle grandezze. Il numero in piccolo è chiamato deponente, e si legge 'bi-uno' e 'bi-due'. Il deponente è pratico, poiché estende di molto il numero dei simboli che possono essere usati, permettendo nel contempo di usare più volte nella stessa equazione lettere con valore mnemonico.

Un deponente è solo parte di un simbolo: la parte che distingue, per esempio, B_1 da B_2. Il deponente non modifica il significato delle operazioni né dei passaggi aritmetici, ma è soltanto l'appendice di una lettera, che la contraddistingue da un'altra.

Tornando al problema, non c'è ragione di supporre che B_1 debba essere maggiore di C (il problema è esclusivamente matematico). Nell'ipotesi che C ammonti a 17 400 lire e B_1 a 15 400 lire, l'operazione di pagamento condurrebbe ad un debito di 2000 lire nei confronti della banca. Ma dal calcolo si ottiene:

$$B_2 = 15\,400 - 17\,400 \text{ lire} = -2000 \text{ lire};$$

da cui si vede che B_2 è un numero negativo.

I numeri del tipo $-13{,}5$, $-50\,000$ e così via, sono detti numeri negativi, mentre

valore assoluto o modulo

13,5, 50 000, sono i loro valori assoluti o moduli. Il modulo di un numero positivo (come 1,35) è il numero positivo stesso, cosicché il modulo di qualsiasi numero è positivo. Il modulo è indicato da barre verticali che racchiudono il numero:

$$|1{,}35| = |-1{,}35| = 1{,}35$$

e, generalizzando:

$$|x| = |-x| \tag{16}$$

ma non si può scrivere di seguito $= x$, in quanto x può essere un numero negativo come B_2, e la sola x non dice e non può dire se x sia positivo o negativo.

Il segno di un numero non causa difficoltà nei passaggi aritmetici; bisogna solo prestare attenzione nei seguenti casi:

a) traducendo un problema in equazioni algebriche·

b) interpretando un risultato ottenuto da operazioni sui simboli;

c) dividendo o eseguendo altre operazioni non consentite con certi numeri (si è già visto che la divisione per zero non è permessa).

L'ultima di queste eventualità non deve preoccupare, poiché può succedere solo quando si tentano nuovi tipi di manipolazioni, oppure quando già è stato commesso in precedenza un errore. La cosa non deve preoccupare, almeno finché non sia stata acquisita una ragionevole esperienza nella manipolazione delle equazioni.

Gli altri due punti riguardano l'interpretazione dei simboli, non il loro uso. Entrambe le situazioni vengono trattate usando le convenzioni di segno, di cui sono mostrati alcuni esempi in Tab. I. Il modulo di x specifica sempre la dimensione del profitto o della perdita, dell'accelerazione o del rallentamento, o di qualunque altra cosa, mentre il segno indica la direzione, ovvero il senso della grandezza, in accordo con la convenzione dei segni.

Tab. I - Convenzioni di segno

se x è definito come	allora un valore negativo di x significa
1) un estratto-conto positivo	un estratto-conto negativo (passivo)
2) la distanza dal riferimento di un oggetto posto alla sua destra	l'oggetto è a sinistra del riferimento
3) la distanza dal riferimento di un oggetto posto alla sua sinistra	l'oggetto è a destra del riferimento
4) la velocità della macchina	la macchina va in retromarcia
5) un profitto	una perdita
6) l'accelerazione della macchina	la macchina rallenta
7) la perdita di peso di una persona che vuole dimagrire	la persona è aumentata di peso

Osservando gli esempi 2) e 3) in tabella, si vede che una x positiva può essere interpretata in due modi diversi; similmente, anche ciascuno degli altri esempi avrebbe potuto essere associato a convenzioni esattamente opposte.

Per vedere quale sia la relazione fra $-b$ e b, si consideri che:

$$-6000 = -2000 - 2000 - 2000 = -3000 - 3000$$

(si pensi a come vengono accumulati i debiti). Si può dire che tre debiti di 2000 lire equivalgono a un debito totale di 6000 lire, ovvero a due debiti di 3000 lire. Esprimendo queste alternative con le notazioni viste, si avrà:

$$-6000 = 3(-2000) = 2(-3000).$$

Si può ricavare una regola generale interpretando 2 o 3 come particolari valori delle espressioni più generali a e b:

$$-(ab) = a(-b) = b(-a). \tag{17}$$

Questa regola è valida per qualsiasi valore di a e b. Ponendo in particolare $a = 1$, l'equazione (17) diventa:

$$-b = 1(-b) = b(-1);$$

l'1 davanti alla parentesi può essere tralasciato, poiché un numero moltiplicato per l'unità vale ancora sé stesso. Dunque $-b$ è uguale a b moltiplicato per -1, ovvero $-b$ è quel numero che deve essere aggiunto a b per ottenere zero. Perciò:

$$-b + b = 0. \tag{18}$$

Se ci si chiede ora il significato di $-(-b)$, la risposta può essere: ciò che deve essere aggiunto a $(-b)$ per dare zero, e dalla equazione (18) si ricava direttamente che esso è b. Quindi:

$$-(-b) = b. \tag{19}$$

Trattando espressioni aritmetiche dove il segno meno compare dentro e fuori parentesi, si acquisirà scioltezza con la pratica, ma bisognerà sempre prestare attenzione. Non esiste probabilmente altro esempio in tutta la matematica, in cui sia così facile commettere errori di distrazione. Fin quando non si sia presa confidenza, il modo più semplice per evitare errori è quello di scrivere sempre $[a+(-b)]$ o $[a+(-1)b]$ al posto di $(a-b)$. In tal caso, rammentando le seguenti facilissime regole:

$$(+1)(+1) = 1 \tag{20a}$$
$$(-1)(+1) = (+1)(-1) = -1 \tag{20b}$$
$$(-1)(-1) = 1, \tag{20c}$$

sarà facile risolvere tutti i possibili casi. La regola da ricordare quindi è la seguente:

regola dei segni

il prodotto di segni uguali è positivo e quello di segni opposti negativo.

Esercizio. Sviluppate le seguenti espressioni in modo da eliminare le parentesi:

a) $(a-b)(c-d)$;
b) $ab - b(a-c)$;
c) $3b(2a-6c)$;
d) $-abc - b(2d-3ca)$;
e) $[1-a(1-b\{1-c\})]$.

(Suggerimento: sviluppate sempre per prima la parentesi più interna).

Risposta.

a) $[a+(-b)][c+(-d)] = a[c+(-d)] + (-b)[c+(-d)] =$
$= ac + a(-d) + (-b)c + (-b)(-d) = ac - ad - bc + bd$;
b) bc;
c) $6ab - 18bc$;
d) $2abc - 2bd$;
e) $1 - a + ab - abc$.

Esercizio. Usate le parentesi per raccogliere a fattor comune gli elementi delle seguenti espressioni:

a) $-abc + abd$;
b) $-abc - cbd$;
c) $-\frac{bc}{ad} - \frac{db}{ac}$;
d) $3ac + 6bc - ad - 2bd$.

Risposta.

a) $ab(d-c)$;
b) $-bc(a+d)$;
c) $-\frac{b}{a}\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)$;
d) $(a+2b)(3c-d)$.

4.6 Somme e sottrazioni di quozienti

Alla fine del paragrafo riguardante la parentesi si è vista la regola per moltiplicare i quozienti, che può essere così espressa:

$$\frac{N_1}{D_1}\cdot\frac{N_2}{D_2}\cdot\frac{N_3}{D_3}\cdot\frac{N_4}{D_4}=\frac{N_1N_2N_3N_4}{D_1D_2D_3D_4}. \tag{21}$$

Altrettanto semplice è dividere un quoziente per un altro, poiché il reciproco del quoziente N/D è D/N:

$$\frac{N_1}{D_1}\Big/\left(\frac{N_2}{D_2}\right)=\frac{N_1}{D_1}\left(1\Big/\frac{N_2}{D_2}\right)=\frac{N_1}{D_1}\left(\frac{D_2}{N_2}\right)=\frac{N_1D_2}{D_1N_2}.$$

Sommare due quozienti è un po' più difficile. Per ricavare la regola generale si ponga uguale a R il risultato, per ora sconosciuto. Sarà dunque:

$$R=\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}.$$

Si moltiplichino entrambi i membri di questa equazione per D_1:

$$D_1R=N_1+\frac{D_1N_2}{D_2}$$

e quindi per D_2:

$$D_2D_1R=D_2N_1+D_1N_2.$$

A questo punto si può ricavare R dividendo entrambi i membri per D_2D_1:

$$R=\frac{D_2N_1+D_1N_2}{D_1D_2}.$$

Eguagliando ora le due espressioni di R si ottiene:

$$\frac{N_1}{D_1}+\frac{N_2}{D_2}=\frac{N_1D_2+N_2D_1}{D_1D_2}. \tag{22}$$

Nel caso della sottrazione, sarebbe possibile procedere allo stesso modo, ma ci si può anche arrivare mediante un piccolo trucco. Cambiando il nome di N_2 in $-N_3$ e di D_2 in D_3 e inserendo questi nella equazione (22), si ottiene:

$$\frac{N_1}{D_1}-\frac{N_3}{D_3}=\frac{N_1D_3-N_3D_1}{D_1D_3}, \qquad (23)$$

che è la regola per la sottrazione di quozienti (ottenuta senza spreco di passaggi). La comparsa del 3 come deponente al posto del 2 non ha alcuna importanza, perché l'unico scopo del deponente è di distinguere l'uno dall'altro i due quozienti sulla sinistra.

Un caso particolarmente semplice, e molto interessante, si ha quando, nell'equazione (22), $D_1 = D_2$ (ovvero $= D$). In tal caso, il membro di destra dell'equazione vale:

$$\frac{DN_1+DN_2}{DD}=\frac{D(N_1+N_2)}{DD}=\left(\frac{D}{D}\right)\left(\frac{N_1+N_2}{D}\right)=\frac{N_1+N_2}{D}$$

e quindi:

$$\frac{N_1}{D}+\frac{N_2}{D}=\frac{N_1+N_2}{D}. \qquad (24)$$

Lo stesso ragionamento applicato all'equazione (23) quando $D_1 = D_3 = D$, dà:

$$\frac{N_1}{D}-\frac{N_2}{D}=\frac{N_1-N_2}{D}. \qquad (25)$$

Questa regola è spesso usata per operare sulle frazioni. Per esempio:

$$\frac{1}{4}+\frac{5}{28}=\frac{7}{28}+\frac{5}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}.$$

In questo caso 1/4 è stato moltiplicato per 7/7 al primo passaggio, per far sì che entrambe le frazioni avessero lo stesso denominatore, cosicché il passaggio successivo consiste semplicemente nella somma dei numeratori. L'ultimo passaggio è soltanto una semplificazione, resa possibile in quanto $\frac{12}{28}=\frac{(4)\,(3)}{(4)\,(7)}$.

Si può verificare da soli che il risultato è uguale a quello ottenuto applicando l'equazione (22).

Esercizio. Calcolate: 1/4–5/28.

Risposta. 1/14.

4.7 Potenze, radici ed esponenti

Nell'ultimo paragrafo, dopo aver sostituito D a ogni D_1 e D_2, il prodotto $D_1 D_2$ risultava uguale a DD. È utile avere una notazione particolare per indicare i fattori ripetuti, poiché quando il numero delle ripetizioni supera quattro o cinque, è difficile evitare confusioni nel conteggiarle. La notazione consiste nello scrivere il simbolo del fattore seguito dal numero delle ripetizioni in alto a destra, in piccolo:

$$\begin{aligned} DD &= D^2 \\ DDD &= D^3 \\ DDDD &= D^4 \\ \underbrace{D \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, D}_{n \text{ volte}} &= D^n. \end{aligned} \tag{26}$$

Queste notazioni vengono lette 'di al quadrato', 'di al cubo', 'di alla enne'; Il numero in alto a destra è chiamato esponente, e il suo valore si dice potenza alla quale è elevato D. È importante capire che l'esponente

elevare a potenza

rappresenta un'operazione che deve essere fatta su D, cioè l'elevazione di D alla potenza specificata dall'esponente. Questo ha un valore molto diverso da un deponente, il quale è solo un'appendice per identificare la lettera che accompagna, e non possiede alcun significato aritmetico.

Esercizio. Sviluppate le seguenti parentesi, usando gli esponenti per esprimere i risultati:

a) $(a + b)\,(a - b)$;
b) $(a + b)^2$;
c) $(a - b)^2$;
d) $(a + b)^3$.

(Se si hanno difficoltà con quest'ultima, si legga fino all'equazione (27) e poi si torni indietro.)

Risposta.

a) $a^2 - b^2$;
b) $a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
c) $a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
d) $(a + b)\,(a + b)^2 = a(a + b)^2 + b(a + b)^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) +$
$+ b\,(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ogniqualvolta si introduce una notazione, è necessario trovare le regole adatte per maneggiarla. Un'occhiata alla sequenza di equazioni (26) suggerisce due di queste regole.

Passando da un'equazione alla successiva, il membro di sinistra viene moltiplicato per D, mentre l'esponente a destra viene aumentato di 1. Spostandosi in avanti di due equazioni bisogna moltiplicare a sinistra due volte per D e aumentare l'esponente a destra di 2. La regola generale per m spostamenti in avanti è dunque:

$$D^m \cdot D^r = D^{m+r}. \qquad (27)$$

La seconda regola si ottiene in modo analogo, ma per spostamenti all'indietro. Così come uno spostamento in avanti equivale a moltiplicare per D da una parte e aggiungere 1 all'esponente dall'altra, uno spostamento all'indietro equivale ad una divisione per D a sinistra, e ad una sottrazione di 1 dall'esponente a destra:

$$\frac{D^m}{D^r} = D^{m-r}. \qquad (28)$$

Quest'equazione rende subito ovvio ciò che non si vede immediatamente nell'equazione (27). L'operazione di divisione per D, con relativa sottrazione di 1 dall'esponente, potrebbe essere ripetuta indefinitamente nell'equazione (26). Ecco qui di seguito un ampliamento della sequenza in tal senso:

$$\begin{aligned}
1/(\underbrace{DD\ldots\ldots D}_{n \text{ volte}}) &= D^{-n}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ \ldots\\
1/(DD) &= D^{-2}\\
1/D &= D^{-1}\\
1 &= D^0\\
D &= D^1\\
DD &= D^2\\
DDD &= D^3\\
DDDD &= D^4\\
DDDDD &= D^5\\
\ldots\ldots\ldots\ldots &\ \ldots\\
\underbrace{DD\ldots\ldots DD}_{n \text{ volte}} &= D^n
\end{aligned}$$

Questi risultati soddisfano anche il buon senso e permettono di esprimere in modo semplice ripetute moltiplicazioni e divisioni per D, essendo, ovviamente D un qualsiasi numero o espressione (l'unica eccezione è, naturalmente, che non sono permesse le potenze negative dello zero).

Una particolarità che può balzare all'occhio è che, nonostante D sia un numero non specificato (positivo o negativo), D^0 vale 1, valore ben definito indipendente da D. Qualsiasi numero elevato alla potenza zero vale 1. Questo potrà sembrare un po' strano, ma si vedrà che è necessario, poiché si deve essere in grado di scrivere per qualsiasi D la seguente relazione:

$$\frac{D}{D} = D\left(\frac{1}{D}\right) = DD^{-1} = D^{1-1} = D^0 = 1;$$

o, più in generale:

$$\frac{D^r}{D^r} = D^r\left(\frac{1}{D^r}\right) = D^rD^{-r} = D^{r-r} = D^0 = 1.$$

(Da notare che è spesso più comodo scrivere D^{-1} che $1/D$.)

Veniamo ora al secondo argomento di questo paragrafo, le radici. Può capitare di dover sapere qual è il numero che moltiplicato per sé stesso dà come risultato A. Ci si potrebbe, ad esempio, chiedere quale sia la lunghezza dei lati di un quadrato di area A. La risposta è un numero chiamato radice quadrata di A e si scrive $\sqrt{A}$. Analogamente ci si potrebbe chiedere di quale numero A sia il cubo, oppure l'ennesima potenza. Le risposte a queste domande

radice quadrata, cubica, ennesima

sono la radice cubica e la radice ennesima di A e si scrivono rispettivamente $\sqrt[3]{A}$ e $\sqrt[n]{A}$. Esiste però, per le radici, una notazione più chiara, che rappresenta un'estensione dell'uso degli esponenti. Se si eleva al quadrato A^p (p sta per potenza), usando la regola dell'equazione (27) si ricava:

$$(A^p)^2 = A^pA^p = A^{p+p} = A^{2p}.$$

Si vede perciò che, elevando al quadrato una potenza di A, raddoppia l'esponente, e ciò suggerisce che, operando al contrario, dimezzare l'esponente equivale ad estrarre la radice quadrata. Si può controllare che questa regola è corretta; infatti:

$$A^{1/2}\,A^{1/2} = A^{1/2+1/2} = A^1 = A,$$

cosicché la radice quadrata di A può essere scritta come $A^{1/2}$. (Qui si sta solo precisando il significato di una notazione e non si vuole trovare il modo per calcolare aritmeticamente il risultato. Come già detto all'inizio, in algebra si cerca di evitare finché possibile i noiosi calcoli aritmetici. Naturalmente, i metodi aritmetici sono indispensabili, perché solo da essi si ottengono le risposte ai problemi reali, sotto forma di numeri e non di formule.)

Lo stesso tipo di deduzione può essere applicato a qualsiasi radice, cosicché si avrà, per esempio:

$$\sqrt[3]{A} = A^{1/3}$$

(perché $A^{1/3}\,A^{1/3}\,A^{1/3} = A^{1/3+1/3+1/3} = A$) e, in generale:

$$\sqrt[n]{A} = A^{1/n}.$$

Esercizio. Come potrebbero essere usati gli esponenti per rappresentare $1/\sqrt{A}$ e $1/\sqrt[3]{A}$?
(In caso di difficoltà, si consiglia di riguardare l'equazione (28), ricordando che $A^0 = 1$.)

Risposta. $A^{-1/2}$, $A^{-1/3}$.

Ogni esponente frazionario, per esempio N/D, ha a questo punto un preciso significato. Si può verificare da soli, usando le regole degli esponenti, che:

$$A^{N/D} = \sqrt[D]{A^N} \tag{29}$$

e

$$A^{-N/D} = \frac{1}{\sqrt[D]{A^N}}. \tag{30}$$

C'è però una complicazione. Se $A^{1/2}$ è un numero positivo, il suo quadrato è un numero positivo. Se invece $A^{1/2}$ è un numero negativo, si può porlo uguale a $-B$, essendo B positivo. Allora:

$$(-B)(-B) = (-1)(-1)B^2 = B^2 = A$$

e A risulta nuovamente positivo. Elevando al quadrato qualsiasi numero reale, positivo e negativo, non si può ottenere un numero negativo. In tal modo si vede che i numeri negativi non ammettono radici quadrate (nella matematica più avanzata, questo ostacolo viene superato con l'introduzione di un nuovo tipo di numero, il numero immaginario, ma questo è un approfondimento che qui non interessa ancora). Lo stesso tipo di ragionamento è applicabile alle radici quarte, seste, ottave, ecc., poiché (provare da soli) ogni potenza pari di un numero negativo è positiva. Non esistono invece difficoltà con le radici cubiche, quinte, settime, ecc., poiché le potenze dispari di (-1) valgono -1.

L'ultimo punto da trattare riguarda le radici quadrate. Tutti i numeri positivi hanno due radici quadrate; infatti:

$$(-B)(-B) = (-1)(-1)(B)(B) = (B)(B) = B^2$$

cosicché se $B^2 = A$, allora anche $(-B)^2 = A$.
Questo viene spesso espresso, scrivendo:

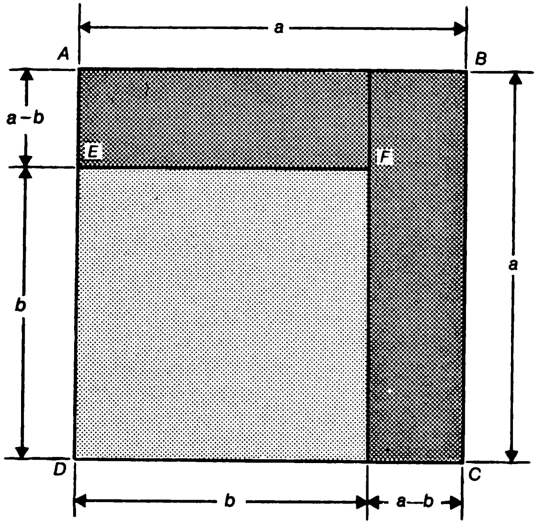
$$A^{1/2} = \pm\sqrt{A} \tag{31}$$

e il doppio segno prima di $\sqrt{A}$ viene letto 'più o meno', perché indica le due possibili risposte.

4.7.1 Una proprietà utile da ricordare. Si supponga di dover calcolare il valore di $(2199)^2 - (2197)^2$. Una semplice proprietà consente di risparmiare molti calcoli, molto tempo e molte occasioni di errore; basta ricordare che:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Fig. 13



Infatti si ha:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

e questo vuol dire che

$(2199)^2 - (2197)^2 = (2199 + 2197)(2199 - 2197) = 4396 \times 2 = 8792$.

In matematica, si dice che $(a + b)(a - b)$ è un prodotto notevole.

La proprietà dimostrata con semplici passaggi algebrici può essere desunta per via grafica. Dalla Fig. 13 si vede che:

— l'area del quadrato maggiore *ABCD* è a^2;

— l'area del quadrato minore *EFGD* è b^2;

— la differenza fra queste due aree è $a^2 - b^2$ e corrisponde all'area indicata nella figura: rettangolo *HBCG* + + rettangolo *AHFE* $= (a-b)b + (a-b)a = (a-b)(a+b)$.

4.8 Alcuni artifici finali

4.8.1 Passaggi aritmetici. Questo paragrafo riassume la maggior parte dei passaggi aritmetici che possono essere eseguiti sulle equazioni. Questo elenco non è completo e non può suggerire come comportarsi in ogni particolare situazione. Tuttavia può essere usato come riferimento ed essere di aiuto quando ci si trovi in difficoltà. È importante osservare che i vari passaggi si effettuano applicando regole semplici.

1) Eseguire le stesse operazioni su entrambi i membri di un'equazione.

Principio: non importa quanto i due membri di un'equazione appaiano differenti; si tratta di un'equazione appunto perché entrambi i membri hanno lo stesso valore. Se si modificano allo stesso modo entrambi i membri, i due nuovi valori così ottenuti saranno ancora uguali.

Passaggi: a) aggiungere la stessa espressione ad entrambi i membri;

b) sottrarre la stessa espressione da entrambi i membri;

c) moltiplicare i membri per la stessa espressione;

d) dividere entrambi i membri per la stessa espressione (questa operazione richiede una certa cautela: infatti, per poterla effettuare bisogna essere sicuri che l'espressione per la quale si divide sia diversa da zero);

e) elevare al quadrato entrambi i membri;

f) estrarre la radice quadrata di entrambi i membri. (Ciò può essere fatto se si sa che almeno uno dei membri è sicuramente positivo. Si deve inoltre introdurre il segno $\pm$, che permette di seguire due diverse possibilità.)

Nota: i passaggi del tipo a), b), c), d) sono stati spesso usati; f) verrà chiarito più avanti.

2) Eseguire su uno solo dei due membri un'operazione che non ne modifica il valore.

Principio: i due membri di una equazione sono sempre espressioni della stessa quantità. Se si modifica il modo di esprimere uno dei due non cambiandone il valore, viene ovviamente mantenuta l'uguaglianza primitiva.

Passaggi: a) raccogliere i termini in parentesi;

b) sviluppare le parentesi;

c) sostituire a un'espressione un'altra di pari valore;

d) sostituire $-b$ con $(-1)b$, o b con $1\,(b)$, o b con $(-1)\,(-b)$, o $(a-b)$ con $-(b-a)$;

e) sommare e sottrarre contemporaneamente la stessa quantità (il che equivale ad aggiungere zero);

f) moltiplicare un membro o una parte di esso per una frazione avente numeratore e denominatore uguali (ciò equivale a moltiplicare per 1, che lascia immutato il valore);

g) riordinare i termini in una somma o i fattori in un prodotto.

Nota: a), b), c), f) sono stati molto usati finora; e) talvolta aiuta a sistemare le parentesi, o può essere più utile di sommare la stessa quantità a entrambi i membri di una equazione; d) e g) sono molto utili, avendo a che fare con parentesi; f) inoltre è la base della semplificazione dei quozienti.

3) Scrivere nuove equazioni.

Questo passaggio non è ancora stato usato, e se ne daranno qui solo alcuni esempi. Supponendo di avere le due equazioni:

$$x + y = 4$$
$$x - y = 2$$

si può ricavare una nuova equazione sommando i due membri di sinistra ed eguagliando il risultato alla somma dei due membri di destra:

$$(x + y) + (x - y) = 4 + 2.$$

Questo artificio viene spesso indicato come 'somma delle equazioni'.

Volendo, si potrebbe invece operare una sottrazione:

$$(x + y) - (x - y) = 4 - 2$$

oppure una moltiplicazione:

$$(x + y)\ (x - y) = (4)\ (2)$$

o, infine, una divisione:

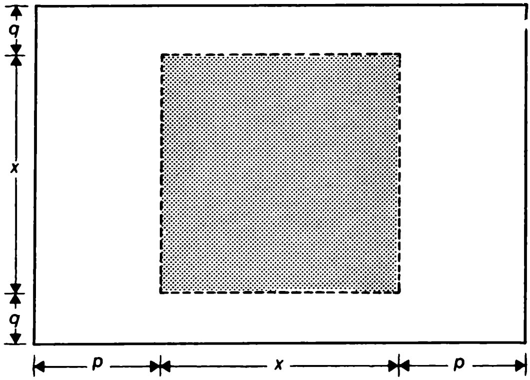
$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{4}{2}.$$

La somma e la sottrazione sono molto utili in questo caso particolare, come si vedrà elaborando ulteriormente i rispettivi risultati. Non altrettanto può dirsi per la moltiplicazione e la divisione che qui abbiamo riportato giusto per mostrarne la possibilità.

4.8.2 Come risolvere un'equazione quadratica. In questo paragrafo non si introdurranno nuove notazioni; si cercherà, semplicemente, di risolvere un problema reale, allo scopo di impratichire il lettore nell'uso dei passaggi aritmetici. Così facendo si otterrà una formula utile, che però non sarà l'unico risultato.

Si supponga di dover tagliare delle piastre rettangolari per coprire dei fori quadrati. Le piastre devono essere rettangolari in modo che sporgano da ogni lato per poter essere fissate (le sporgenze non devono essere inferiori a un minimo stabilito, diverso per i lati verticali e orizzontali, come mostra la Fig. 14). Il problema consiste nel trovare le dimensioni della piastra che, con una superficie data, permettono di massimizzare l'area del foro quadrato ricoperto. Siano q e p le sporgenze minime ammesse per i lati, A l'area della piastra. Sia x il lato del foro più grande che si può ricoprire. Per essere sicuri che il foro coperto sia il più grande possibile, bisogna evitare di sprecare superficie di piastra, cioè

Fig. 14



bisogna far sì che la sporgenza risultante sia la minima indispensabile.

I lati della piastra misureranno quindi rispettivamente $(x + 2p)$ e $(x + 2q)$ e saranno completamente determinati una volta noto x. Per trovare x si può utilizzare l'equazione che esprime l'area della piastra:

$$(x + 2p)\ (x + 2q) = A.$$

Ora bisogna elaborare l'equazione fino a isolare x, cioè risolverla rispetto ad x. Sviluppando il prodotto fra le parentesi si ottiene:

$$x^2 + 2qx + 2px + 4pq = A;$$

quindi si può introdurre una nuova parentesi:

$$x^2 + 2x(p + q) + 4pq = A.$$

Sottraendo A da ogni membro, si ottiene:

$$x^2 + 2x(p + q) + 4pq - A = 0.$$

Cambiamo ora nome ad alcuni termini (la spiegazione di questo passaggio verrà data fra poco). Si ponga dunque:

$$b = (p + q) \qquad (32)$$

$$c = 4pq - A. \qquad (33)$$

In tal modo l'equazione diventa:

$$x^2 + 2bx + c = 0. \qquad (34)$$

Ed ecco la spiegazione. Prima di tutto, l'equazione (34) è un po' più semplice della prima versione, è più facile da maneggiare, cosicché diminuirà la possibilità di commettere errori nei vari passaggi. (Questa è spesso una buona ragione per modificare il nome dei termini di una equazione.) Secondariamente, A, p e q sono tutti dati del problema, cosicché i loro valori numerici, sostituiti nelle equazioni (32) e (33), permettono di ricavare facilmente b e c. C'è anche una terza ragione, che verrà presto spiegata, dopo avere risolto l'equazione (34). Ora, per vedere qual è il prossimo passo da fare, si consideri lo sviluppo di $(x+b)^2$:

$$(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2. \tag{35}$$

Sarebbe troppo bello se fosse verificato che $c = b^2$. Tuttavia, si può aggiungere b^2 a entrambi i membri dell'equazione (34), ottenendo così:

$$x^2 + 2bx + b^2 + c = b^2,$$

ovvero

$$(x + b)^2 + c = b^2.$$

A questo punto, si può sottrarre c da ogni membro:

$$(x + b)^2 = b^2 - c$$

e (a patto che $b^2 - c$ sia positivo) estrarre la radice quadrata da entrambi i membri:

$$x + b = \pm \sqrt{b^2 - c};$$

notare il segno $\pm$ che origina i due valori per la radice quadrata. (Si potrebbe pensare che il segno $\pm$ debba comparire in entrambi i membri. Però, osservando più attentamente, si vedrà che il caso con il $-$ da entrambi i lati equivale a quello con il $+$ da entrambi i lati, mentre quello con $-$ a sinistra e $+$ a destra equivale al caso con $+$ a sinistra e $-$ a destra, cosicché i casi possibili sono solo due.) Sottraendo ora b da entrambi i membri, si può isolare x:

$$x = - b \pm \sqrt{b^2 - c}. \tag{36}$$

Proviamo adesso con i numeri. Supponendo $A = 320$ cm^2, $p = 3$ cm, $q = 5$ cm, dalle equazioni (32) e (33) si ottiene:

$b = 3 + 5 = 8$
$c = 4 \times 3 \times 5 - 320 = 60 - 320 = - 260$
$b^2 = 8 \times 8 = 64$
$b^2 - c = 64 - (- 260) = 64 + 260 = 324$
$\pm \sqrt{b^2 - c} = + 18$ (con un po' di fortuna, il numero è intero)
$x = - 8 \pm 18$
$= 10$ usando il segno $+$
$= - 26$ usando il segno $-$.

La seconda risposta non è accettabile, poiché fisicamente non ha senso. Ciò significa che l'equazione, soddisfatta dalla corretta soluzione del problema, può risultare soddisfatta anche da un altro numero. La soluzione del problema quindi, secondo i dati assegnati, è che il quadrato ha il lato di 10 cm e la piastra misura 16 cm x 20 cm.

Per concludere, la terza ragione che ha indotto a mutare le denominazioni di alcuni termini per ottenere l'equazione (34), è che quest'ultima è scritta in forma cosiddetta standard.

Così, sebbene l'equazione (34) possa essere scritta in molti altri modi (attraverso cambiamenti di nome delle variabili e adattamenti vari), questa è la forma più semplice alla quale ci si riferisce quando si parla di equazione quadratica. Naturalmente, non è necessario ripetere ogni volta i passaggi dall'equazione (34) alla (36). Trovandosi a risolvere un'equazione rispetto a una qualunque variabile U, si tratterà di un'equazione quadratica se U compare come fattore in uno o più termini, come U^2 in altri termini e non compare affatto nei rimanenti. Per risolvere un'equazione generica di questo tipo, si può cambiare nome a U sostituendogli x, e trovare le espressioni che debbono avere b e c per ridursi all'equazione in forma standard (34). A questo punto, applicando l'equazione (36), si può ricavare immediatamente il risultato.

Esercizio. Data l'equazione $3d + y^2 = y^4 - 4$, mostrate che si può ridurre alla forma standard dell'equazione quadratica sostituendo:

$x = y^2$
$b = -1/2$
$c = -(3d + 4)$.

Esercizio. Mostrate che l'equazione $(x - 2)(x + 1) = 0$ è un'equazione quadratica, che può essere espressa facilmente in forma standard.

Esercizio. Che espressioni devono avere b e c per ridurre l'equazione $Ax^2 + Bx + C = 0$ alla forma standard?

Risposta. $b = B/2A$; $c = C/A$.

---

5 Alcune conclusioni

Ciò che si è tentato di mostrare è che, educando la mente a ragionare con simboli e regole, e unendo a ciò una comprensione intuitiva dell'aritmetica (il che non tira in ballo l'abilità nel maneggiare numeri) è possibile formarsi un discreto bagaglio di matematica.

Se questo è il primo incontro con la materia, non ci si aspetti di essere diventati maestri in tutto ciò di cui si è parlato. Ci vuole più tempo per apprendere nuovi modi di pensare, che non per estenderne le applicazioni in seguito. Se si è alfine capito che si è in grado di galleggiare, si può confidare che in breve tempo si sarà anche in grado di nuotare.

I matematici saranno probabilmente inorriditi per quanto è stato scritto. Non si è spiegato cosa siano un assioma o un teorema; si è usato un linguaggio impreciso e argomentazioni di dubbio valore; si sono formulate affermazioni imprudenti. Ma si è pensato che fosse molto più importante stimolare la fiducia anziché inseguire la precisione. Sovente, un matematico richiamerà il pericolo di affidarsi all'intuizione. Egli sorprende lo sprovveduto con dimostrazioni che rivelano quanto l'intuizione possa portare fuori strada, e quanto sia inadeguato il buon senso, e sulla lunga distanza egli ha certo ragione. Ma il punto è che è inutile cercare di battere il *crawl* prima di avere imparato a tenersi a galla, e qui il buon senso avrà la stessa funzione delle pinne da nuotatore.

6 Analogie grafiche e modelli matematici

6.1 Rappresentazione di equazioni

Torniamo ora ai modelli, con il semplicissimo modello matematico del moto di un treno. Si supponga che il treno stia viaggiando a velocità costante su un lungo binario diritto, in

Fig. 15

direzione nord. A mezzanotte precisa transita in corrispondenza di una segnalazione. Il modello completo del moto del treno sarà noto, se si potrà calcolare a ogni istante dopo la mezzanotte la distanza del treno dalla segnalazione. La funzione del modello è quindi quella di correlare una certa distanza con un tempo prefissato. Non è difficile verificare la relazione di Fig. 15, ovvero dire che:

$$s = vt \qquad (37)$$

dove

s = distanza verso nord del treno dal segnale (kilometri);
t = tempo dopo la mezzanotte (minuti);
v = velocità del treno (kilometri al minuto).

Da notare che fin qui non è stato necessario stabilire la velocità del treno. La caratteristica dei modelli matematici è la loro natura generale che permette loro di adattarsi a qualsiasi prototipo (per esempio treni che viaggiano a diverse velocità). Invece, una particolarità di questo modello è la sua estrema semplicità: una volta scelta una particolare velocità (sostituendo a v un valore definito), dall'equazione

(37) si ricava la distanza (il valore di s) per ogni istante di tempo (valore di t).

Esercizio. Tracciate i grafici richiesti da questi esercizi su carta millimetrata (Fig. 16a). Disegnateli tutti sullo stesso sistema di assi, distinguendo i vari tracciati mediante una $v =$, seguita dal suo valore.

a) Assegnate a v, nell'equazione (37), il valore di 1 km/min. Utilizzate l'equazione per costruire una tabella, a partire dalla mezzanotte (cioè includendo il valore $t = 0$), della distanza del treno a nord del segnale riferita ad intervalli di un minuto, fino a cinque minuti dopo la mezzanotte. Eseguite ciò prima di leggere il resto dell'esercizio.

A questo punto rappresentate i valori tabulati e tracciate una curva che riunisca i punti disegnati. (La parola 'curva' è usata in senso generale ed include le rette e le curve a zig-zag come quelle di Fig. 5.) Controllate che qualunque punto corrispondente ad una coppia di valori legati dall'equazione (37) appartenga alla curva disegnata.

b) Assegnate a v, nell'equazione (37), il valore di 2 km/min e ripetete l'esercizio.

c) Assegnate a v il valore di 0,5 km/min e ripetete.

d) Assegnate a v il valore di 3 km/min e ripetete.

e) Assegnate ora a v il valore di 0 km/min. Come interpretare il risultato che avrete ottenuto?

f) Assegnate a v il valore $-0{,}5$ km/min. Anche in questo caso, come interpretare i risultati?

g) Ora valutate tutti i grafici tracciati nei punti in cui $t = -1, -2, -3$ minuti. Che cosa significa ciò?

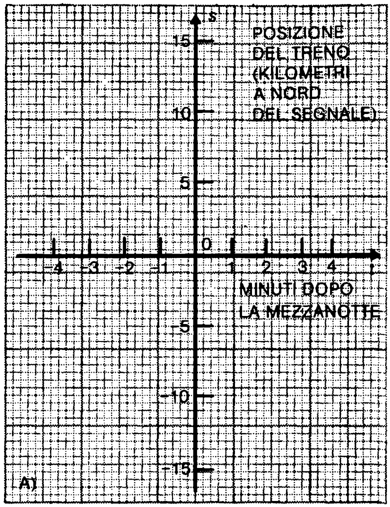
Risposta. Nel caso e) il treno risulta fermo; nel caso f) esso risulta andare in retromarcia . Infine, in g), si considera la posizione del treno prima della mezzanotte.

A questo punto ci si sarà probabilmente ben convinti che, per qualunque valore di v, il grafico che si ottiene rappresentando le coppie di valori s (distanza) e t (tempo), ricavate dall'equazione (37), è sempre una linea retta che passa per l'origine degli assi. La pendenza della retta aumenta con v, e una pendenza negativa cresce anch'essa con v, quando il treno marcia all'indietro.

Il grafico costituisce un modello del moto del treno allo stesso modo dell'equazione da cui deriva.

Ciò che si è appunto visto permetterà di procedere nell'analisi dei modelli secondo due diverse direzioni. Una di queste riguarda l'interpretazione dei grafici e il loro uso nella costruzione dei modelli. L'altra è la direzione matematica nella quale non si baderà al significato che i simboli hanno per i modelli. Questa direzione verrà affrontata per prima poiché essa permetterà di semplificare la discussione dell'altra.

Si osservino i grafici tracciati e si immagini di cancellare i



numeri e le suddivisioni lasciando solamente t sull'asse orizzontale e s sull'asse verticale. Indipendentemente dal significato di t, s e v, c'è una chiara relazione fra l'equazione $s = vt$ e le rette che passano per l'origine. Ognuna di queste rette differisce dall'altra solo per la pendenza, e i diversi valori di v dell'equazione corrispondono alle pendenze delle rette.

Si imponga un valore a v, per esempio 2; l'equazione (37) diventa in tal caso:

$$s = 2t. \tag{38}$$

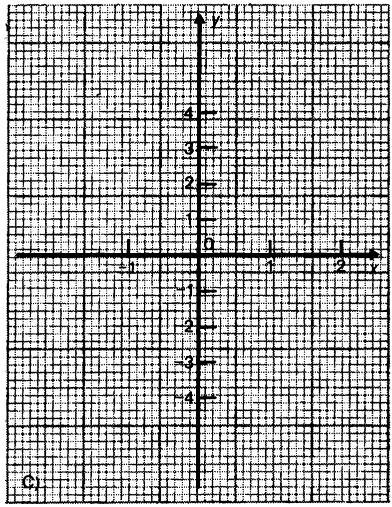
Il grafico che è stato tracciato per $v = 2$ è un modello analogico dell'equazione (38) e, parimenti, l'equazione (38) è un modello simbolico del grafico. Si usa dire che l'equazione (38) è l'equazione 'del' grafico, mentre il grafico è il grafico 'della' equazione. Questa stretta relazione tra i grafici e le equazioni è molto utile: significa che si può pensare la matematica in termini figurati, e che, quando sia conveniente, si possono risolvere problemi matematici disegnando e misurando.

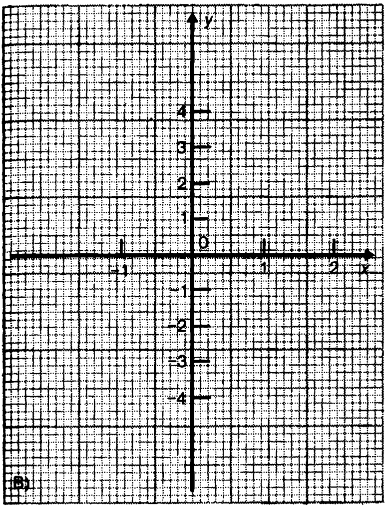
Esistono naturalmente rette che non passano per l'origine. Su un grafico che riporti l'asse x orizzontalmente e l'asse y verticalmente (si ricordi che questi simboli rappresentano numeri, ma non hanno altra interpretazione, cosicché non bisogna chiedersi cosa siano x ed y) l'equazione

$$y = bx + c \tag{39}$$

può rappresentare qualunque retta, fatta eccezione per quella perfettamente verticale. Per fissare una particolare retta bisogna attribuire valori numerici a b e c.

Fig. 16





Esercizio. a) Utilizzando lo spazio apposito di Fig. 16, si disegni il grafico delle seguenti equazioni nel campo che va da $x = -1$ a $x = 1$. Si scrivano accanto a ciascuna retta i corrispondenti valori di b e c. Sulla Fig. 16b si traccino i primi quattro grafici e sulla Fig. 16c i rimanenti.

$y = 2x$	$y = 2x + 1$
$y = 2x + 2$	$y = 2x - 2$
$y = -x + 1$	$y = x + 1$
$y = -2x + 1$	$y = 1$
$y = x/2 + 1$	

b) Una retta passa per i punti $x = -2$, $y = 3$ e $x = 2$, $y = 0$. Qual è la sua equazione? (Tracciarne il grafico e cercare di rifarsi a ciò che si è imparato nell'esercizio precedente.)

L'equazione (39) è detta equazione generale di una retta.

equazione di una retta

L'equazione $$y = ax^2 \qquad (40)$$
è invece l'equazione di una parabola. La Fig. 17 mostra i

grafici di alcune parabole. L'equazione più complessa

$$y = ax^2 + bx + c \tag{41}$$

è anch'essa relativa ad una parabola. Dalla Fig. 18 si può vedere che la forma della parabola è determinata dal valore di

equazione di una parabola

a, mentre le costanti *b* e *c* hanno solo l'effetto di spostarla rispetto all'origine; questo particolare, che può essere utile per i modelli, non si sarebbe potuto facilmente dedurre dalla sola osservazione dell'equazione (41).

Come ultimo esempio, si voglia trovare l'equazione del cerchio. La Fig. 19 mostra un cerchio di raggio *R*. Un suo

equazione del cerchio

punto qualunque *P* può essere determinato dalle sue distanze *x* e *y* dagli assi: *x* e *y* si chiamano coordinate di *P* e devono essere legate fra loro da una qualche relazione che assicuri che *P* appartiene al cerchio. Questa relazione non

Fig. 17

Alcune parabole.

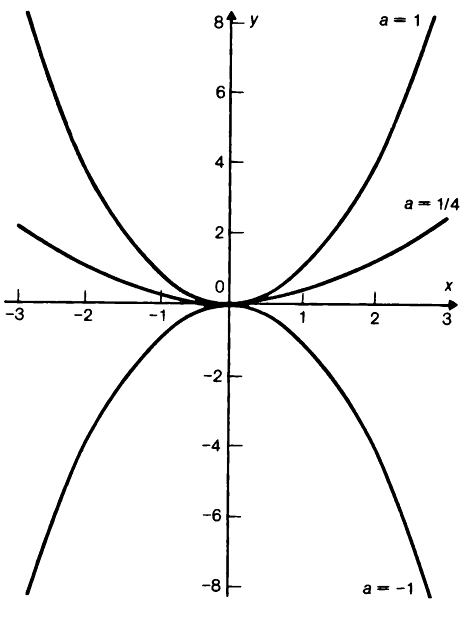


Fig. 18

Altre parabole.

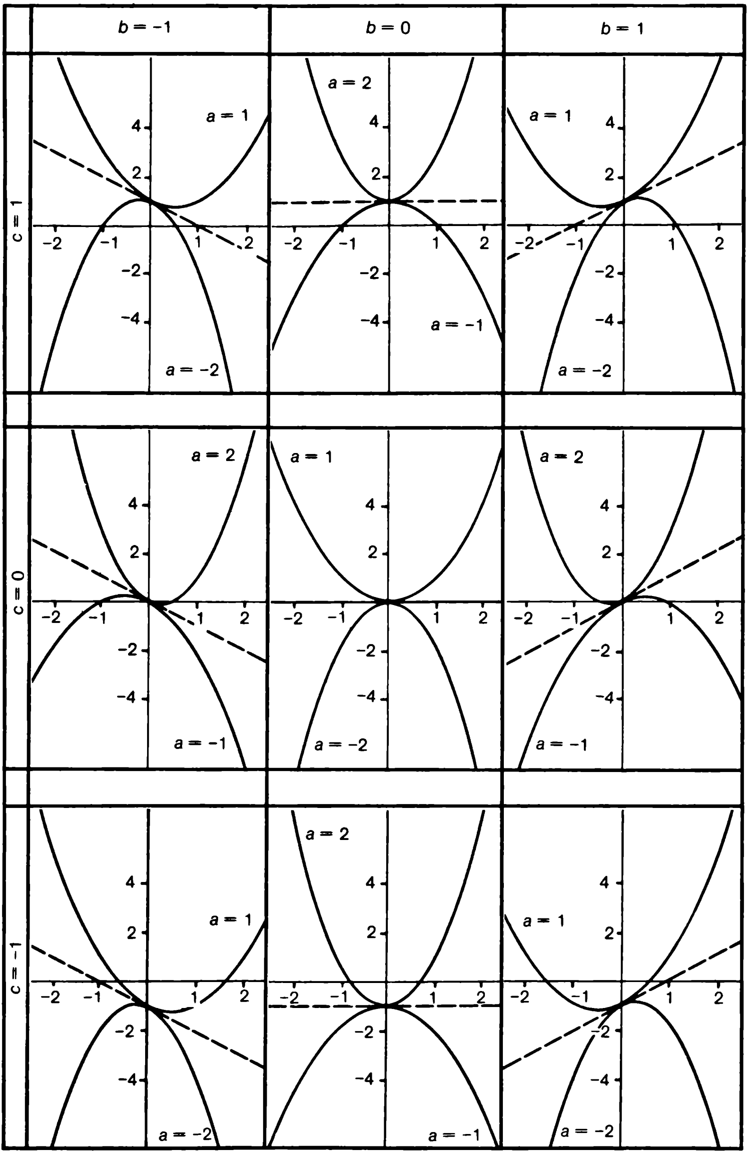
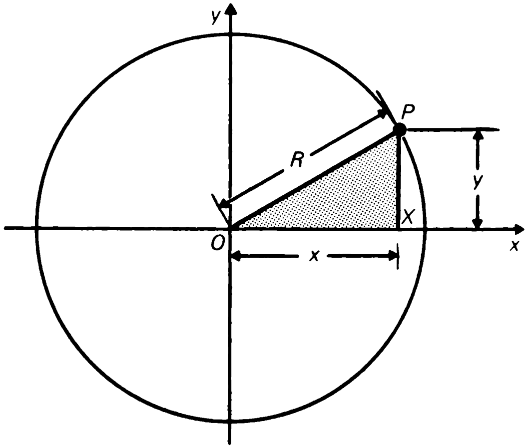


Fig. 19

Coordinate di un punto del cerchio.



sarà altro che l'equazione del cerchio. In Fig. 19 è disegnato il triangolo rettangolo *OPX*, i cui cateti sono lunghi rispettivamente x e y e la cui ipotenusa è il raggio del cerchio. Applicando a questo triangolo il teorema di Pitagora (enunciato e dimostrato nell'appendice 1), si ottiene direttamente l'equazione del cerchio

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{42}$$

Esercizio. Si disegni un cerchio su carta millimetrata e si verifichi che le coordinate di alcuni punti scelti a caso soddisfano un'equazione del tipo (42). (Qualche imprecisione potrà verificarsi a causa degli inevitabili piccoli errori di misura.)

6.2 Calcolare misurando: un semplice esempio di calcolo analogico

Si è appena visto che i calcoli basati su misure non sono del tutto accurati. Tuttavia in molti problemi pratici una incertezza dell'1 o 2% sul valore dei risultati è poco rilevante, e d'altra parte misurare è spesso molto più semplice che calcolare. Uno strumento molto utile, il regolo calcolatore, utilizza una rappresentazione analogica dei numeri per ridurre la noia dei calcoli aritmetici. Esso si basa sulla regola della moltiplicazione fra potenze dello stesso numero, D, che afferma:

$$D^m \cdot D^r = D^{m+r}. \qquad (43)$$

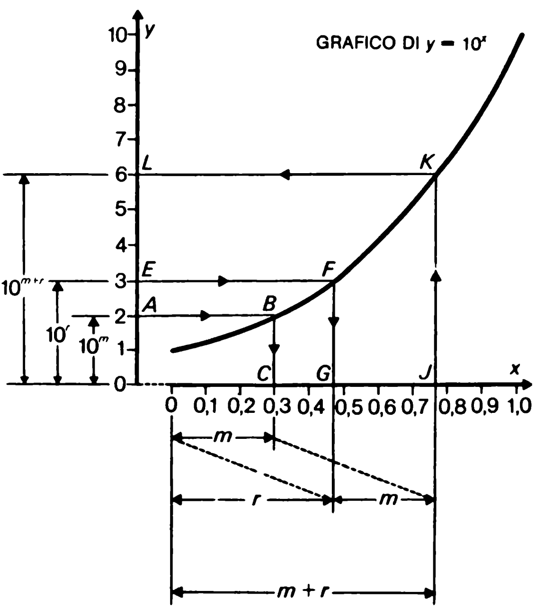
(Questa è l'equazione (27) già vista nel paragrafo 4.7.)

La Fig. 20 rappresenta graficamente l'equazione $y = 10^x$. (Questo grafico non è altrettanto facile da disegnare come gli altri visti finora, ma qui non interessa come è stato ottenuto.) Per capire come si utilizza questo grafico, si ponga $D = 10$ nell'equazione (43) e si supponga di voler moltiplicare 2 x 3. Naturalmente sono stati scelti questi numeri per semplicità, ma se si scegliessero i numeri 2,137 e 3,492 il discorso non cambierebbe. Si può a questo punto porre $2 = 10^m$ e trovare il valore di m seguendo il percorso $A \rightarrow B \rightarrow C$ sul grafico; allo stesso modo se $3 = 10^r$ si trova r seguendo il percorso $E \rightarrow F \rightarrow G$.

Dall'equazione (43) si ricava che $2 \times 3 = 10^m \cdot 10^r = 10^{m+r}$ e, sommando i valori di m e di r trovati, si giunge al punto J sull'asse x del grafico; da qui, seguendo il percorso $J \rightarrow K \rightarrow L$, si perviene alla risposta. Il valore di m che rende

Fig. 20

L'operazione di moltiplicazione con l'aiuto di un'analogia grafica.



10^m uguale a 2 si chiama logaritmo di 2 in base 10. In generale, il logaritmo in base 10 di qualunque

logaritmo

numero è la potenza alla quale bisogna elevare 10 per ottenere quel numero. Il valore x, ottenuto sull'asse orizzontale di Fig. 20 seguendo il percorso del tipo *ABC* o *EFG*, è perciò il logaritmo del numero y da cui si è partiti.

Il logaritmo di y in base 10 si scrive $\log_{10} y$. Il grafico di Fig. 20, inizialmente chiamato grafico della equazione $y = 10^x$, può benissimo essere indicato come grafico di $x = \log_{10} y$.

Esercizio. Verificare che il procedimento grafico, che in Fig. 20 rappresenta la moltiplicazione di 2 per 3, può essere indicato dalla seguente espressione: $\log_{10}(2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3$.

I logaritmi possono essere definiti in qualunque base si dimostri opportuna. La base 10 è una delle più usate e in tal caso i logaritmi vengono chiamati comuni (o decimali); la base viene spesso tralasciata nelle forme abbreviate, per cui si scrive spesso:

$$y = 10^{\log y}. \tag{44}$$

La regola generale per la moltiplicazione usando i logaritmi è la seguente:

$$\log MN = \log M + \log N. \tag{45}$$

La Fig. 21 mostra lo stesso grafico di Fig. 20, ma le suddivisioni della scala verticale sono state proiettate, passando per il grafico, sull'asse orizzontale, da cui sono state eliminate le suddivisioni precedenti. Su questo asse, quindi, la distanza dalla suddivisione indicata con 1 a una qualunque altra suddivisione è proporzionale al logaritmo del numero indicato su quest'ultima.

Il regolo calcolatore è essenzialmente costituito da due scale, suddivise logaritmicamente nel modo appena detto, che

regolo calcolatore

possono scorrere l'una sull'altra. Quando si devono moltiplicare fra loro due numeri, l'1 della scala scorrevole viene posizionato sul punto della scala fissa che indica il primo fattore, quindi si sposta la linea di fede del corsoio (Fig. 22) sul punto della scala scorrevole che indica il secondo fattore. Il prodotto si può leggere direttamente sulla scala fissa in corrispondenza della linea di fede stessa.

Esercizio. Osservando la parte superiore della Fig. 22, si può notare che la disposizione ivi rappresentata potrebbe anche significare la divisione di 6 per 3. Sulla base di ciò, ricavate le istruzioni per effettuare la divisione col regolo calcolatore.

Risposta. Posizionare la linea di fede del corsoio sulla scala fissa in corrispondenza del numero da dividere. Spostare la scala scorrevole fino a che il divisore coincida con la linea di fede. La risposta si legge sulla scala fissa in corrispondenza con la posizione del numero 1 sulla scala scorrevole.

Potrà sembrare strano che si possa moltiplicare 2 per 6 usando il regolo calcolatore, in quanto il 6 della scala scorrevole cade fuori della scala fissa, come si vede. Il trucco è mostrato nella Fig. 22, in basso. Il 10 della scala

Fig. 21

Costruzione di una scala logaritmica.

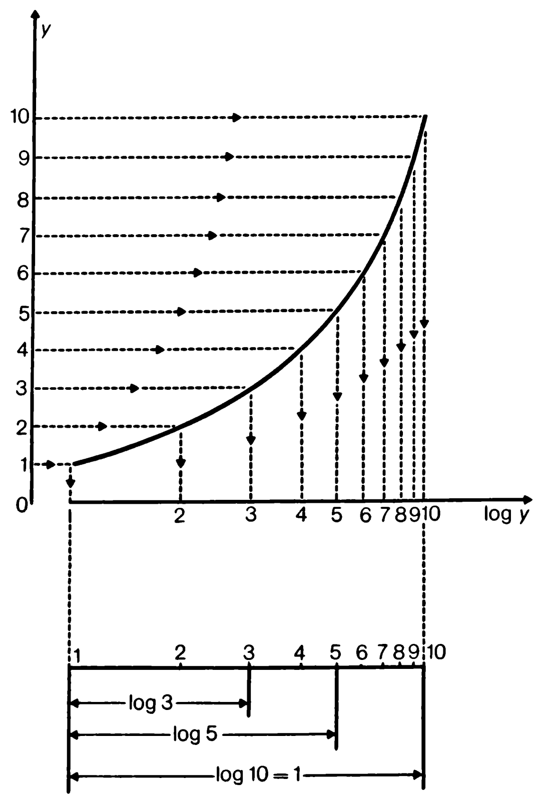
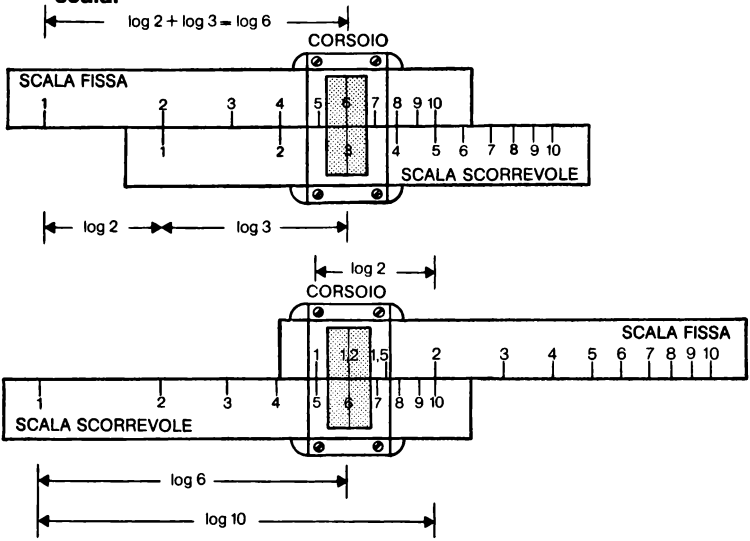


Fig. 22

L'uso del regolo calcolatore in caso normale e in caso di fuori scala.



scorrevole viene posto, invece dell'1, in corrispondenza del primo fattore della scala fissa. Questo ha l'effetto di dividere il primo fattore per 10 prima di moltiplicarlo per il secondo fattore. Si può infatti vedere dalla Fig. 22 che la distanza misurata a partire dall'1 della scala fissa fino al risultato indicato dal cursore è proporzionale a log 2 − log 10 + log 6. La virgola decimale della risposta non cadrà al posto giusto, ma la sua vera posizione si può trovare facilmente. In compenso, nelle moltiplicazioni e nelle divisioni devono spesso essere elaborate numerose cifre, e ciò viene comodamente eliminato con l'uso del regolo calcolatore.

Il regolo calcolatore è uno strumento di calcolo che sostituisce a una procedura di calcolo una di misura. I dispositivi di calcolo che utilizzano rappresentazioni analogiche di numeri si chiamano calcolatori analogici.

Si svolgano ora gli esercizi 1, 2, 3, 4, 5, 6 di autovalutazione.

6.3 L'elaborazione matematica delle misure

Associare curve e grafici alle equazioni è utile quando si vogliono costruire modelli matematici per spiegare fenomeni fisici. Il comportamento fisico viene rilevato effettuando tutte le misure opportune, i cui risultati sono poi di norma riportati in tabelle e grafici.

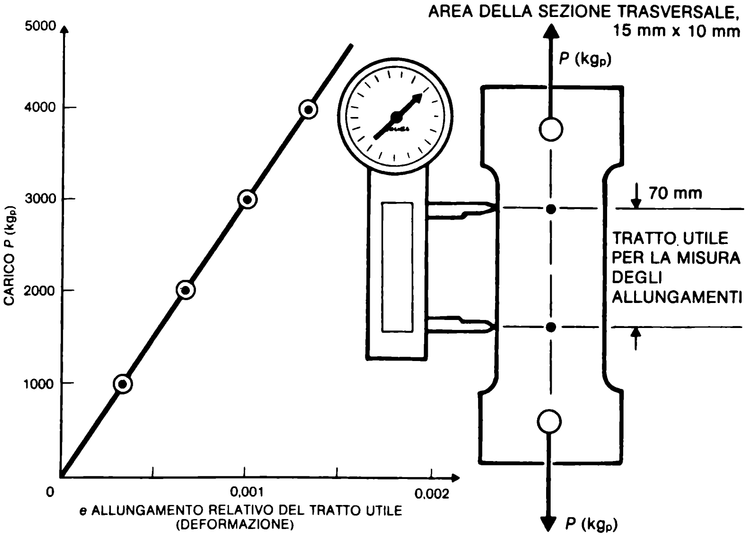
Appendendo verticalmente una sbarretta di acciaio e caricandola con un peso al suo estremo inferiore, si osserverà un allungamento all'aumentare del carico. Misurando questo allungamento per un certo numero di carichi differenti, si può tracciare un grafico del tipo di quello di Fig. 23. Se il carico applicato non è eccessivo, si possono rappresentare punti che riguardano misure effettuate sia aumentando il carico sia diminuendolo, e tutti questi punti risultano molto vicini ad una retta che passa per l'origine. Se P rappresenta il carico applicato, e l'allungamento della sbarretta e K la pendenza della retta, l'equazione della retta sarà:

$$P = Ke. \tag{46}$$

Perciò, attraverso il grafico, le misure effettuate permettono di descrivere algebricamente il comportamento della sbarretta caricata. K è chiamato resistenza assiale della sbarretta, e si dice che questa ha un comportamento elastico quando un'equazione del tipo (46) è sufficiente a descriverlo

Fig. 23

Diagramma carico-allungamento per un provino d'acciaio sotto prova di trazione.



completamente.

L'equazione (46) è chiamata legge di Hooke. Essa si applica a molti materiali, oltre che all'acciaio, ma la sua descrizione del comportamento di una sbarretta non è più soddisfacente, quando il carico P supera

legge di Hooke

un certo valore che dipende dalle dimensioni della sbarretta e dal materiale di cui è costituita.

Per utilizzare nel modo migliore le misure in matematica i grafici a scala logaritmica possono talvolta essere di grande aiuto. In una massa di gas mantenuta a temperatura costante, il volume (V) cambia in funzione della pressione (P) applicata. Il legame fra queste due variabili è rappresentato da una linea retta, se si riporta su un grafico il logaritmo di V in funzione del logaritmo di P. A seconda della temperatura, si ottengono rette diverse, tutte con

Fig. 24

Diagramma pressione-volume, rilevato a temperature diverse e riferito a scale logaritmiche, per una massa di gas.

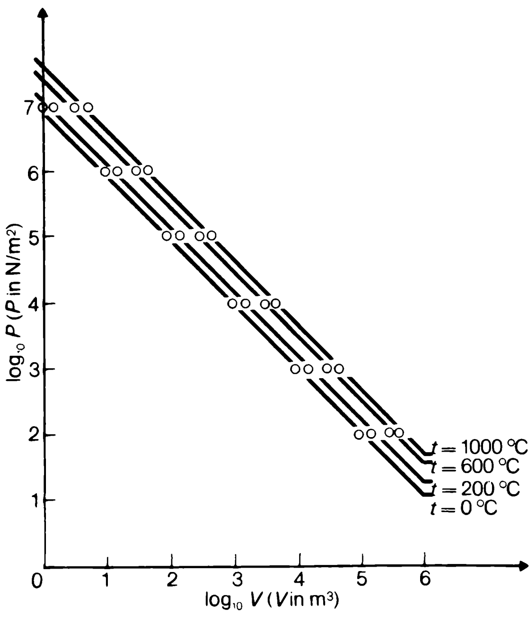
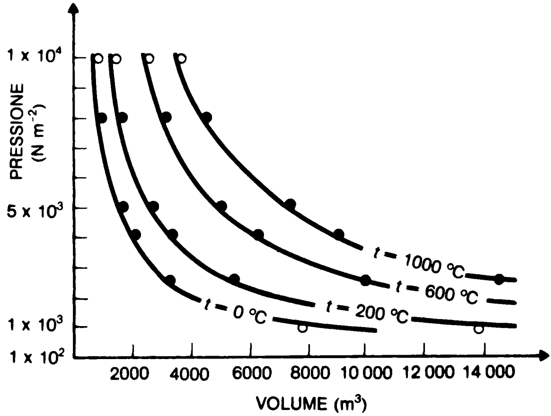


Fig. 25

In un diagramma riferito a scale lineari, le rette di Fig. 24 diventano delle iperboli.



pendenza − 1. Alcune di esse sono mostrate in Fig. 24, e per ognuna vale la relazione:

$$(\log P) = A - (\log V). \qquad (47)$$

Il valore di A, che varia a seconda della temperatura, può essere espresso come il logaritmo di un certo numero, ad esempio a, consentendo di sostituire A nell'equazione (47) con $\log a$, e quindi, aggiungendo $\log V$ ad entrambi i membri, si ottiene: $\log V + \log P = \log a$, da cui:

$$PV = a \qquad (48)$$

(se si hanno dei dubbi, si riguardi l'equazione (45)).

L'equazione (48) è chiamata legge di Boyle e dà la relazione fra la pressione ed

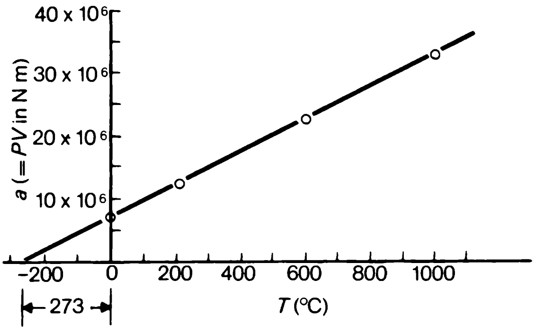
legge di Boyle

il volume di una massa di gas a temperatura costante. Se si riportano su un grafico P e V usando scale lineari per entrambi, le curve risultanti (chiamate iperboli) sono simili a quelle di Fig. 25. Le curve hanno tutte valori diversi di a, che può essere rappresentata in funzione della temperatura, come appare nel grafico di Fig. 26. Questo grafico è di nuovo una linea retta, che taglia l'asse orizzontale in un punto intorno a − 273 °C.

L'equazione della retta risulta semplificata, se si misura la temperatura a partire da questa intersezione, invece che da 0 °C. Questa intersezione si chiama lo zero assoluto

Fig. 26

Grafico di $a = PV$ in funzione della temperatura.



della temperatura (determinato con precisione, esso vale $-273{,}15\,°C$) e la nuova scala di temperatura si chiama scala Kelvin. Su questa scala le temperature, misurate in kelvin (K), sono sempre superiori rispetto a quelle

zero assoluto di temperatura e scala Kelvin

della scala Celsius (centigrada) di una costante che vale appunto 273,15 K. La retta passa in questo caso per la nuova origine degli assi e, detta r la sua pendenza, la sua equazione sarà:

$$a = rT, \tag{49}$$

dove T è la temperatura nella scala Kelvin. Si può usare l'equazione (48) per sostituire a, ottenendo:

$$PV = rT. \tag{50}$$

La costante r deve dipendere dalla quantità di gas in gioco, ma non è il caso di approfondire l'argomento. In questo esempio i grafici sono stati più volte utili nel ricavare il modello matematico del comportamento di un gas (equazione (50)).

Il grafico sperimentale di Fig. 26 è stato estrapolato verso le basse temperature per poter definire la scala Kelvin, nonostante che il modello costituito dall'equazione (50) non sia valido in questo campo. Nonostante ciò, sia la scala Kelvin sia l'idea di uno zero assoluto sono di fondamentale importanza.

6.4 Costruzione di modelli grafici

6.4.1 Modelli di tassi di variazione. All'inizio del capitolo sono stati disegnati alcuni grafici, ognuno dei quali rappresentava l'avanzamento di un treno che viaggia a velocità costante. All'aumentare della velocità cresceva la pendenza del grafico corrispondente.

Esercizio. Nella Fig. 27 un grafico visualizza la posizione di un treno nel tempo che passa dalla sua uscita da una galleria all'entrata in un'altra. La scala delle distanze è sufficientemente ampia per poter rappresentare la lunghezza del treno, cosicché il limite superiore della banda che rappresenta lo spostamento dà la posizione della locomotiva, mentre il limite inferiore dà la posizione dell'ultimo vagone. Sulla sinistra del disegno è riportato uno schizzo del tratto di binario compreso fra le due gallerie. L'asse dei tempi è stato diviso in otto intervalli: usandoli come riferimento si cerchi di esprimere a parole lo svolgimento del viaggio come descritto dal grafico.

Suggerimento: in caso di difficoltà, potrà essere d'aiuto questo espediente. Sulla destra della figura c'è un duplicato del percorso del treno: lo si ricalchi e vi si pratichi una fessura longitudinale (che simula il binario). Lo si ripieghi ora sulla linea tratteggiata in modo che possa scorrere facilmente sul bordo di un righello. Si disponga a questo punto la striscia ritagliata sul grafico, in modo che la parte piegata possa scorrere sul righello che deve essere appoggiato parallelamente all'asse dei tempi. Facendo ora muovere questa striscia con velocità costante (per simulare il costante trascorrere del tempo), attraverso la fessura si potrà osservare un tratto nero che sale, e così descrive il movimento del treno sul binario.

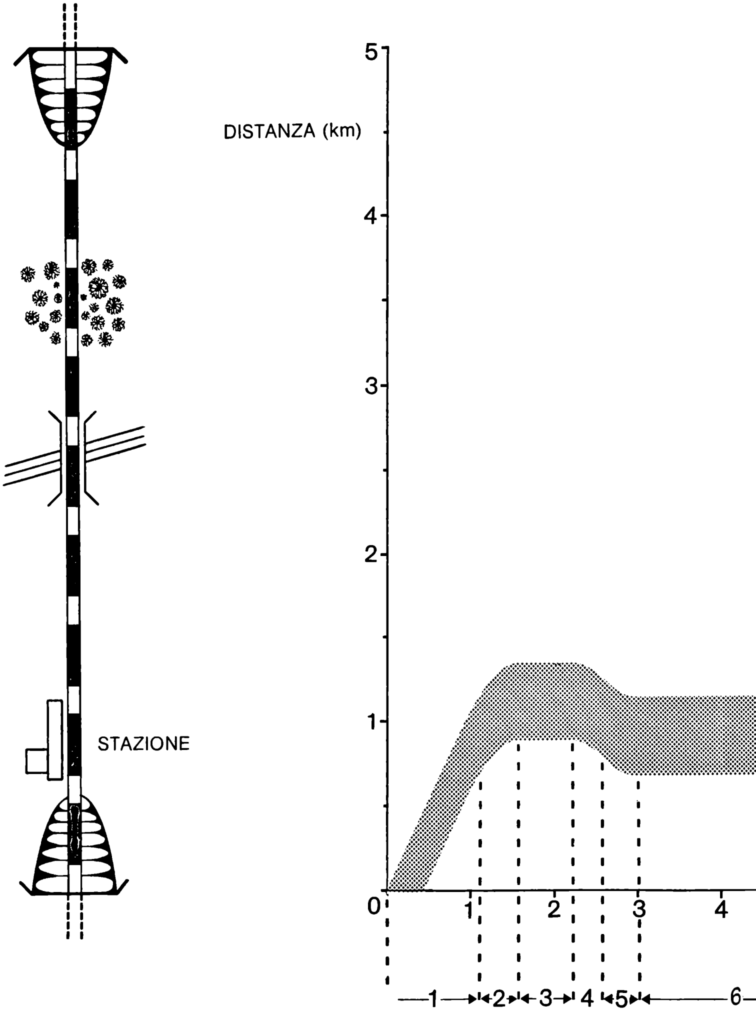
Il grafico di questo esercizio, come quelli disegnati in precedenza, riporta le distanze in funzione del tempo. Nei grafici relativi al moto di treni a velocità costante, si riscontra, come già detto, una corrispondenza fra la pendenza delle rette e la velocità del treno. Questa corrispondenza si mantiene anche al variare della velocità, ma in tal caso il grafico avrà una pendenza variabile (proprio come quello dell'esercizio). Eccone l'interpretazione:

Intervallo 1: il treno esce dalla galleria e mantiene costante la sua velocità. Il grafico ha infatti in tutto questo intervallo pendenza costante.

Intervallo 2: il grafico mantiene in questo intervallo una pendenza positiva che diminuisce progressivamente (il treno sta rallentando mentre si avvicina alla stazione). Verso la fine dell'intervallo la pendenza è diventata zero, cioè il treno si è fermato, ma la scala delle distanze mostra che ha oltrepassato la stazione.

Fig. 27

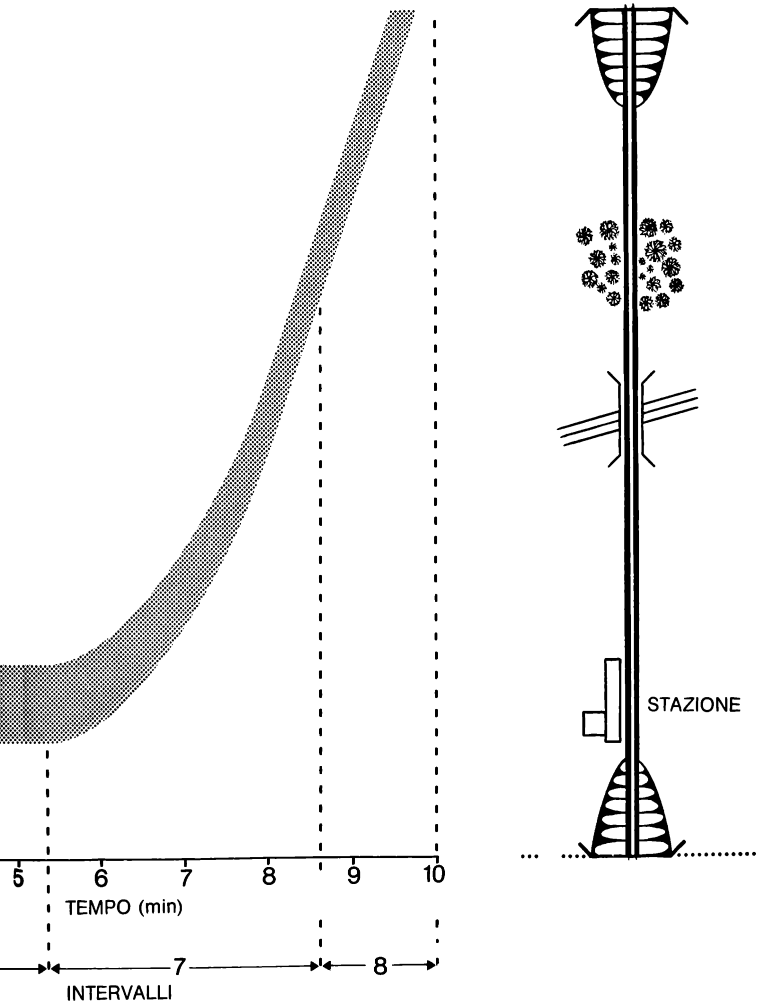
Che cosa succede al treno fra l'uscita da una galleria e l'entrata nella galleria successiva? Ricalcando su una striscia di cartoncino il modellino di binario riprodotto a destra, praticandovi una lunga finestra sottile secondo la strisciolina bianca al centro e facendola scorrere sul grafico, lo si vedrà.



Intervallo 3: attraverso tutto questo intervallo la pendenza del grafico è zero, cioè il treno è fermo.

Intervallo 4: la pendenza del grafico vale zero all'inizio dell'intervallo, e successivamente diventa sempre più negativa (cioè la curva è rivolta verso il basso). Il treno acquista velocità viaggiando in retromarcia.

Intervallo 5: la pendenza della curva è negativa per tutto l'intervallo (il treno viaggia all'indietro), ma diminuisce



progressivamente (il treno rallenta), diventando zero alla fine dell'intervallo (il treno si ferma, proprio in corrispondenza del marciapiede).

Intervallo 6: il grafico ha pendenza zero, cioè il treno è in attesa al marciapiede.

Intervallo 7: la pendenza del grafico riparte da zero ed aumenta positivamente attraverso tutto l'intervallo, cioè il treno riparte e acquista velocità.

Intervallo 8: la pendenza del grafico è costante, un po' maggiore di quella dell'intervallo 1. Il treno attraversa la galleria a velocità costante, maggiore di quella con cui era uscito dalla galleria precedente.

Parlando di grafici a pendenza variabile si usa un concetto di pendenza un po' più raffinato di quello necessario per le rette. La nozione intuitiva di pendenza di una linea potrebbe essere sufficiente per trattare variazioni di velocità del tipo di quella rappresentata in Fig. 28a. La Fig. 28b rappresenta

Fig. 28

Come si determina la pendenza delle rette.

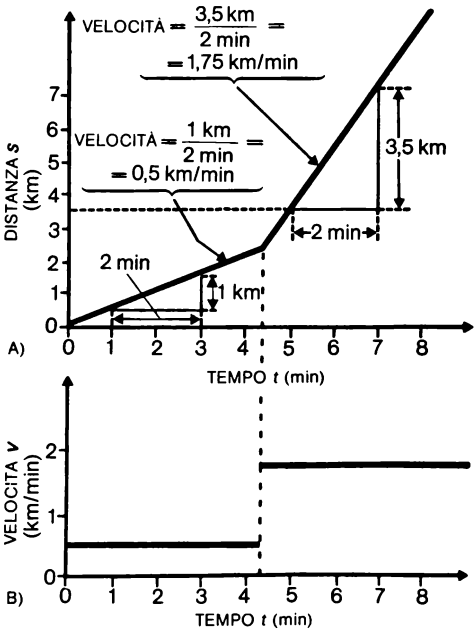
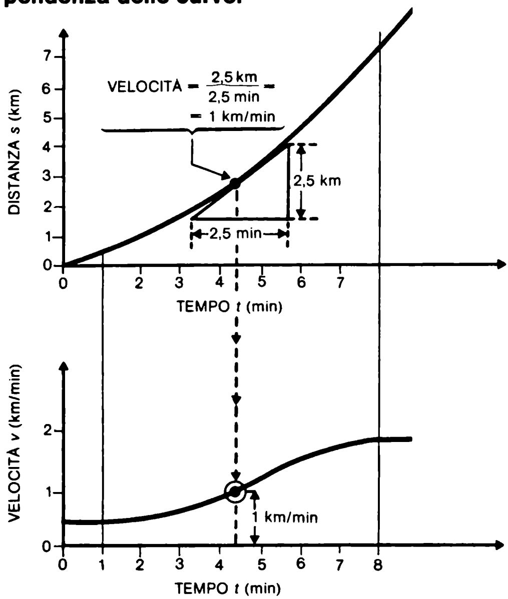


Fig. 29

Come si determina la pendenza delle curve.



in funzione del tempo la velocità del moto descritto dalla Fig. 28a, e, come insegna l'esperienza, non c'è nulla che, muovendosi ad un certo istante con una determinata velocità, possa l'istante successivo avere una velocità nettamente diversa dalla prima.

Nel passaggio da una velocità a un'altra, qualunque oggetto in movimento dovrà passare anche per tutte le velocità intermedie. Ciò significa che il grafico della distanza in funzione del tempo deve essere una curva raccordata (senza discontinuità). Per precisare il concetto di pendenza nel caso di grafici non rettilinei, si farà riferimento all'idea di tangente, retta

tangente

che tocca la linea in un sol punto. La pendenza di una curva in un certo punto sarà definita come quella della tangente alla curva in quel punto. L'inclinazione della tangente può essere misurata nello stesso modo usato per le rette di Fig. 28.

La Fig. 29 mostra un esempio di questa procedura applicata a un punto di un grafico che rappresenta un passaggio graduale di velocità i cui estremi iniziale e finale sono gli stessi di quelli in Fig. 28. (Si faccia attenzione che la pendenza si calcola dividendo la distanza misurata sulla scala verticale per il tempo misurato sulla scala orizzontale, e non dividendo i corrispondenti tratti misurati sulla carta. Il risultato perciò non dipende dalle scale scelte per disegnare il grafico.)

Esercizio. Il grafico di Fig. 30 rappresenta il movimento della locomotiva del treno nell'intervallo 7 dell'esercizio precedente. Viene riportata la distanza in funzione del tempo, utilizzando però scale diverse e una differente origine. Tracciando le tangenti a questa curva in più punti, si ricavi il grafico della velocità del treno in funzione del tempo.

Per indicare la pendenza di un grafico si usa una notazione speciale. La Fig. 31 mostra un tratto di grafico del moto di un treno che ne dà la distanza (s) in funzione del tempo (t). Sulla curva sono segnati due punti, P e Q, il primo dei quali, P, è individuato dal tempo t_P e dalla distanza s_P. L'intervallo di tempo fra le situazioni rappresentate da P e Q è stato indicato con Δt. Il simbolo Δ (delta) è spesso usato in questi casi con il significato di 'incremento di'. Essendo parte di una abbreviazione esso è strettamente legato al simbolo che lo segue, cosicché Δt significa 'incremento di t', e non 'delta volte t'. L'incremento di distanza che corrisponde all'intervallo Δt è stato chiamato Δs. La retta che congiunge P con Q ha la pendenza $\Delta s/\Delta t$ e rappresenta la velocità co-

Fig. 30

Moto di un treno che esce da una stazione.

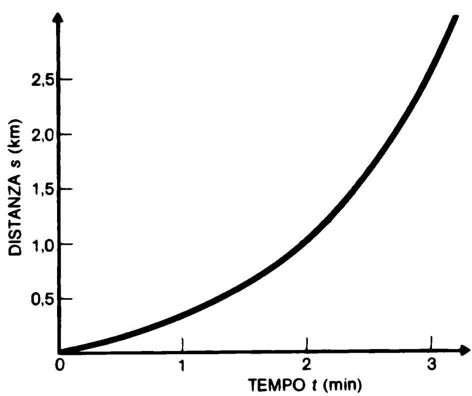
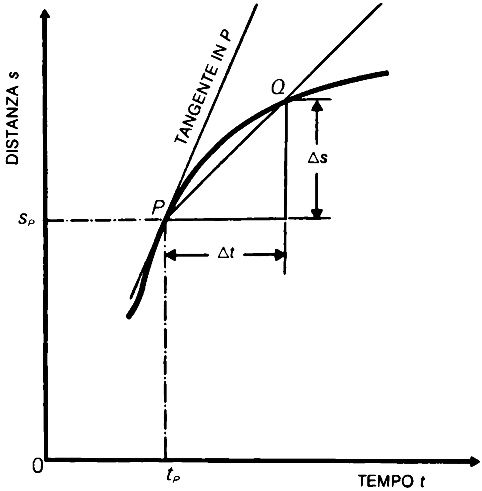


Fig. 31



stante alla quale il treno avrebbe potuto viaggiare per coprire la distanza Δs nel tempo Δt, cioè la velocità media del treno nell'intervallo Δt. Se Δt è molto piccola, $\Delta s/\Delta t$ è praticamente uguale all'inclinazione della tangente in *P*, la quale si indica con $\frac{ds}{dt}$ (che si pronuncia di-esse su di-ti). Il passaggio da Δ a 'd' implica che Δt e, conseguentemente, Δs siano, nel quoziente $\Delta s/\Delta t$, numeri infinitamente piccoli. (Nel caso ciò interessi, se ne potrà trovare una spiegazione più esauriente nell'appendice 2.)

Riassumendo, quindi, ds/dt è la simbologia usata per indicare la pendenza di un grafico che rappresenta *s* in funzione di *t*. Siccome a ogni punto della curva corrisponde un valore di ds/dt, è possibile tracciare il grafico di ds/dt in funzione di *t*. L'operazione per calcolare (il grafico di)

derivazione

ds/dt a partire da (il grafico di) *s* si dice derivazione di *s* rispetto a *t*. Spesso ds/dt viene chiamata derivata di *s* rispetto a *t*, ovvero tasso di incremento di *s* rispetto a *t*.

Avrete forse notato che non abbiamo finora specificato il significato di *s* e *t*; ciò è stato volutamente evitato, poiché la nomenclatura usata è del tutto generale. Il testo potrebbe essere riletto sostituendo *y* ad *s* ed *x* a *t*, senza alterare minimamente il significato delle affermazioni fatte. La locuzione 'il grafico di' è stata scritta due volte fra parentesi, per cercare di separare in qualche modo i due argomenti che sono qui trattati contemporaneamente: le analogie grafiche e i modelli matematici. La locuzione fra parentesi riguarda la rappresentazione analogica, ma si vedrà più avanti che vi sono anche metodi simbolici per calcolare le derivate delle grandezze note.

Ritornando al significato già attribuito ai simboli, se s sta per distanza o, meglio, posizione, e t per tempo, ds/dt sta per velocità (v). Se si riporta su un grafico ds/dt (pendenza di una curva che dà la posizione in funzione del tempo) in funzione del tempo, si ottiene l'andamento della velocità v, anch'essa in funzione del tempo. Anche questa curva avrà a sua volta una pendenza, che si indicherà con dv/dt e che può essere riportata graficamente in funzione del tempo. Si otterrà la curva dell'accelerazione, ovvero della derivata della velocità rispetto al tempo.

Nell'esercizio precedente si richiedeva di tracciare il grafico della velocità del treno in funzione del tempo. Un grafico della velocità con pendenza costante (cioè una linea retta) implica un costante incremento della velocità: il moto del treno avviene cioè con accelerazione costante (provate a verificare tutto ciò disegnando in scala un po' accurata i grafici corrispondenti).

Per ricapitolare, nei modelli grafici la derivata della grandezza indicata sulle ordinate (ad esempio s) rispetto a quella indicata sulla ascissa (ad esempio t) è rappresentata dalla pendenza della curva (rapportata naturalmente alle scale utilizzate). La pendenza di una curva in un suo punto si assume essere quella della tangente in quel punto.
L'operazione per la determinazione del tasso di incremento si chiama derivazione. Il tasso di incremento di s rispetto a t si indica con ds/dt e si chiama derivata di s rispetto a t. Se s rappresenta la posizione di un oggetto e t il tempo ds/dt ne rappresenta la velocità: derivata dello spazio rispetto al tempo.

La derivata della velocità v rispetto al tempo (dv/dt) si chiama accelerazione.

6.4.2 Rappresentazione degli effetti cumulativi di variazioni graduali. Nel paragrafo precedente è stato illustrato il processo (derivazione) attraverso il quale è possibile ricavare, a partire dai dati di posizione di un treno nel tempo, la curva della sua velocità, ovvero, più generalmente, a partire dai dati che descrivono la dipendenza di una grandezza da un'altra, la derivata della prima grandezza rispetto alla seconda.

Le derivate e la comprensione del modo di rappresentarle sono importanti, perché moltissimi sono i concetti che possono essere espressi in termini dinamici di 'tasso d'incremento'. La legge di Hooke e quella di Boyle (che sono state illustrate nel paragrafo 6.3 L'ELABORAZIONE MATEMATICA DELLE MISURE) non sono tipici modelli fisici poiché in questo campo sono molto più numerose le leggi che esprimono relazioni fra grandezze utilizzando le loro derivate.

Poiché le interazioni elementari in molti modelli hanno a che fare con derivate, l'elaborazione delle proprietà che ne scaturiscono conduce spesso a valutare gli effetti cumulativi

integrazione

di variazioni graduali delle grandezze interessate. Questa operazione si chiama integrazione. Un tipico problema di questo genere potrebbe essere la ricerca della posizione di un oggetto nel tempo, nota che sia la sua accelerazione. A questo esempio si farà riferimento nella trattazione che segue.

Si supponga che un tale voglia progettare una macchina per lanciare il piattello per il tiro a volo. Il problema è di calcolare il comportamento del piattello supponendo che venga scagliato verso l'alto con una velocità iniziale di 20 m s^{-1}. Bisogna in particolare sapere che altezza raggiungerà (se non viene colpito) e per quanto tempo resterà in aria a una quota non inferiore alla minima, fissata in 5 m, sopra la quota di lancio. Quel tale potrebbe decidere che un modello adeguato ai suoi scopi è quello che considera la gravità come unico fattore che influenza il moto dell'oggetto (il piattello), e che è sufficientemente preciso attribuire ad essa il valore costante di 10 m s^{-1}/s (accelerazione rivolta verso il basso). Supponendo di adottare il modello del progettista, si vedrà ora in che modo egli può procedere. In effetti, per molti dei metodi che verranno illustrati è abbastanza improbabile che un progettista li utilizzi; egli invece, avendo già una certa pratica con questo tipo di problemi, ricorrerebbe certamente a poche formule con le quali ha più dimestichezza. I seguenti metodi sono tuttavia molto pratici e vengono spesso impiegati per risolvere problemi ben più elaborati di quello dell'esempio.

Per iniziare, dunque, si sa che un oggetto parte verso l'alto con velocità di 20 m s^{-1} ed è soggetto a un'accelerazione costante verso il basso pari a 10 m s^{-1}/s. Chiamando positivo il movimento verso l'alto, la velocità iniziale sarà indicata con +20 m s^{-1} e l'accelerazione costante, essendo verso il basso, con −10 m s^{-1}/s.

Quest'informazione è sufficiente per poter tracciare il grafico della velocità in funzione del tempo. La costanza dell'accelerazione indica che la derivata della velocità è costante, per cui il suo grafico avrà pendenza costante: si tratta di una retta la cui pendenza è data dall'accelerazione, -10 m s ^{1}/s, e che perciò è inclinata verso il basso. Per poter tracciare la retta è necessario conoscerne almeno un punto, e la velocità iniziale permette di determinarlo. Indicando con t il tempo in secondi dopo il lancio, per $t = 0$ la velocità vale $+20$ m/s. Il grafico è disegnato in Fig. 32.

Per completare la descrizione del movimento, bisogna avere la curva che riporta, in funzione del tempo, la posizione dell'oggetto rispetto alla quota di lancio. Si indicherà con s la distanza in metri dell'oggetto dal punto di partenza. Si sa che la velocità a un certo istante dà la pendenza della curva desiderata in quell'istante. Ognuno dei triangoli neri di Fig. 32 ha l'ipotenusa inclinata in modo proporzionale alla velocità indicata dalla corrispondente linea nera verticale. (Naturalmente potrebbero esserci molti più triangoli, a distanza ravvicinata.)

Il grafico della distanza in funzione del tempo va costruito a partire dalle informazioni sulla sua pendenza che si possono ricavare dall'esame della Fig. 32.

Fig. 32

Grafico della velocità, in funzione del tempo, nel lancio del piattello.

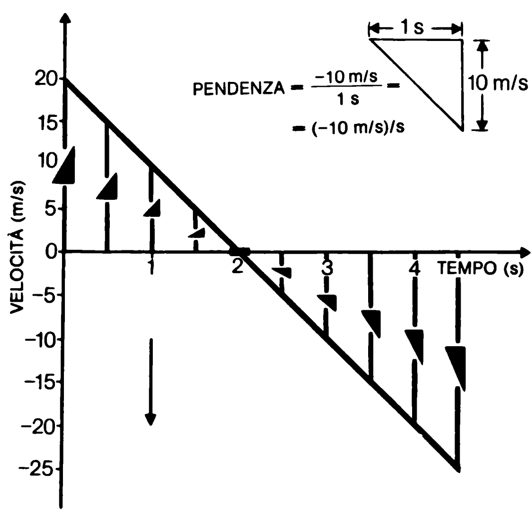
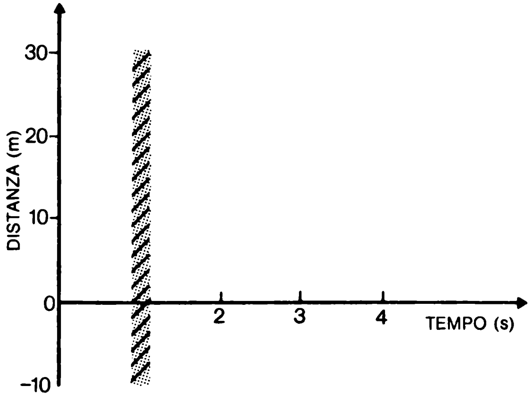


Fig. 33

Famiglia di possibili tangenti al grafico della distanza in funzione del tempo, in corrispondenza del valore $t = 1$ s.

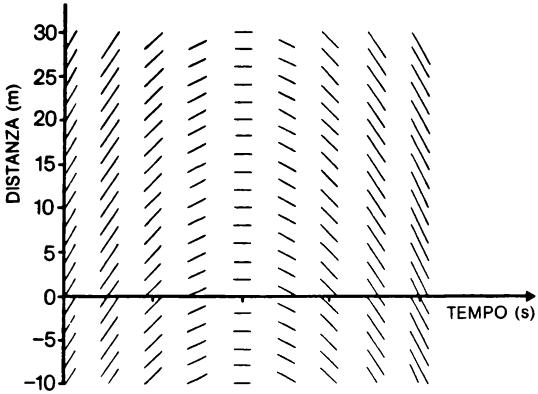


Si sa che al tempo $t = 1$ s, ad esempio, la tangente al grafico che si vuol tracciare ha pendenza pari a quella che si ricava dal corrispondente triangolo nero di Fig. 32. Si osservi che, se il grafico deve avere la stessa scala dei tempi di Fig. 32, questa scelta determina la scala delle distanze. A questo punto non si conosce esattamente a quale altezza questa tangente deve essere disegnata, però si possono riportare tanti trattini con la stessa inclinazione a varie altezze sul grafico (Fig. 33). Questi trattini rappresentano un'intera famiglia di linee parallele, una delle quali (che potrebbe anche non essere stata disegnata) è la vera tangente al grafico all'istante $t = 1$ s. In Fig. 34 sono stati tracciati analoghi gruppi di trattini, di opportuna inclinazione, a intervalli di mezzo secondo sull'asse dei tempi. L'effetto prodotto è simile a quello che probabilmente tutti hanno avuto modo di osservare spargendo della limatura di ferro su un foglio di carta appoggiato sulle espansioni polari di un magnete.

Seguendo con l'occhio l'andamento dei trattini di Fig. 34, si può intravedere che essi sono tangenti ad una famiglia intiera di curve che non si intersecano. (Si potrebbe anche pensare, paragonandole a quelle di Fig. 18, che si tratti di parabole.) La soluzione del problema dato consiste però in una sola curva. Ogni processo di integrazione conduce a una famiglia di risultati. La scelta di uno fra essi (la soluzione di un particolare problema) viene chiamata 'deter-

Fig. 34

Famiglie di tangenti in corrispondenza di valori diversi di *t*.



minazione della costante di integrazione'. In questo esempio ciò si ottiene fissando l'altezza ($s = 0$) dalla quale l'oggetto viene scagliato al tempo $t = 0$.

In effetti, nell'ottenere la velocità a partire dall'accelerazione si è già proceduto a un'integrazione (si ricorderà che la velocità iniziale era necessaria per decidere quale delle rette con pendenza -10 m s^{-1}/s rappresentasse il tipo di moto assegnato).

Il grafico della distanza in funzione del tempo può essere tracciato a mano, in maniera abbastanza precisa per molti scopi, guidandosi con i trattini di Fig. 34. L'accuratezza della curva potrebbe essere migliorata riducendo sia orizzontalmente che verticalmente le dimensioni degli intervalli fra i trattini. Questo tipo di soluzione del problema si chiama metodo delle isocline. Esso può essere usato per calcolare y quando dy/dx dipende da y oltre che da x: infatti ogni punto del diagramma di coordinate

metodo delle isocline

x, y permette di determinare localmente il valore di dy/dx. Si possono così tracciare piccoli tratti di tangente per tutti i punti necessari alla costruzione del grafico di y in funzione di x. Il metodo è anche una buona dimostrazione di come la rappresentazione grafica possa aiutare a ricavare le proprietà dei modelli.

Integrando il grafico di Fig. 32 con questo metodo (passando attraverso la Fig. 34) si è fatto molto più lavoro di quanto non fosse veramente necessario.

Sempre servendosi del metodo grafico si può risolvere il problema in maniera meno laboriosa. In Fig. 35 i segmenti di tangente sono stati prolungati fino ad incontrarsi, iniziando da quello relativo al punto $s = 0$, $t = 0$ (in tal modo viene subito fissata la costante di integrazione). La risultante poligonale, a parità di intervalli, dà la stessa precisione della Fig. 34. Per migliorare l'approssimazione, si possono calcolare le nuove tangenti ogni quarto di secondo invece di ogni mezzo, e, riducendo viepiù questo intervallo, il poligono di tangenti risulterà indistinguibile dalla curva cercata.

La curva di Fig. 35 è costituita da segmenti di retta, e si sa che una retta che rappresenta la distanza in funzione del tempo è indice di velocità costante. La poligonale disegnata equivale quindi ad assumere che la velocità abbia valori costanti e differenti nei vari intervalli di tempo. In Fig. 36 il grafico originale della velocità in funzione del tempo è sovrapposto a una curva a gradini che mostra le velocità corrispondenti a quelle della poligonale di Fig. 35. Ogni gradino rappresenta una velocità costante, mantenuta per un breve intervallo, pari a quella relativa al punto di mezzo dell'intervallo stesso. (Il primo intervallo di sinistra è di lunghezza dimezzata poiché lo si può considerare come parte destra di un intervallo centrato su $t = 0$.) Le poligonali

Fig. 35

La poligonale ottenuta intersecando le tangenti dà il grafico approssimato della distanza in funzione del tempo nel lancio del piattello.

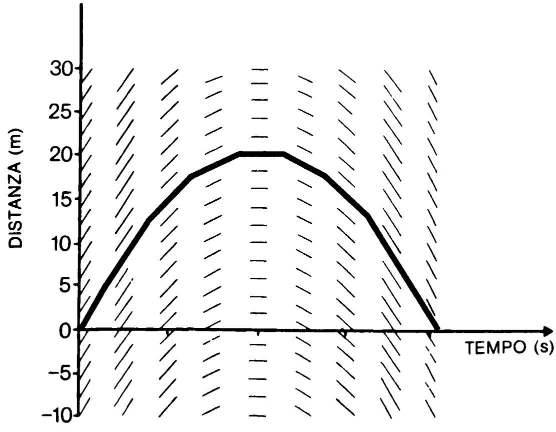


Fig. 36

Grafico della velocità in funzione del tempo; in sovrapposizione, il grafico approssimato corrispondente alla poligonale di Fig. 35.

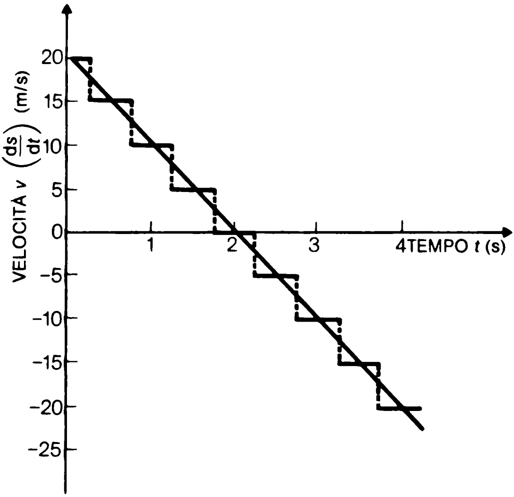
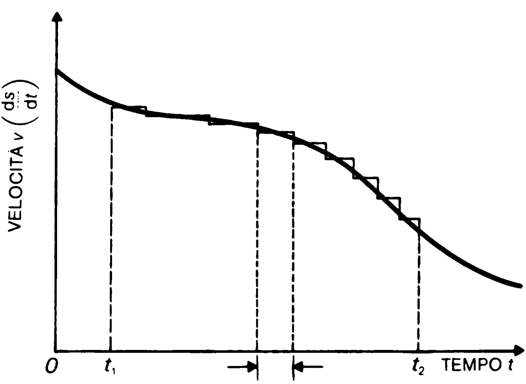


Fig. 37

Approssimazione di un grafico arbitrario della velocità in funzione del tempo.



costruite con intervalli via via più stretti migliorano l'approssimazione del grafico della distanza in funzione del tempo perché i corrispondenti gradini, diventando più piccoli, approssimano meglio la curva della velocità. La Fig. 36 è un caso piuttosto particolare perché il grafico da approssimare è una retta, cosicché i gradini sono di uguale altezza. Il discorso però non cambia quando si abbia a che fare con una curva. Le poligonali di tangenti possono essere disegnate con l'asse dei tempi diviso in intervalli disuguali, ovvero con pendenze che cambiano in diversa misura da un intervallo al successivo. In ogni caso, all'avvicinarsi dei gradini alla curva della velocità, la poligonale darà una migliore approssimazione della curva della distanza in funzione del tempo.

L'idea di approssimare il grafico continuo della velocità in funzione del tempo mediante una spezzata a gradini è molto utile. Essa, infatti, non costituisce solo la base per la costruzione della poligonale della distanza in funzione del tempo, ma evidenzia un'importante analogia. Per spiegarla, lasciando momentaneamente da parte il problema del lancio del piattello, si userà un grafico arbitrario della velocità in funzione del tempo quale quello riportato in Fig. 37. Su un tratto del grafico è stata disegnata una spezzata a gradini, uno dei quali, limitato dalle due verticali punteggiate, è largo Δt e il suo piano è in corrispondenza della velocità v. Nella approssimazione del gradino, l'incremento di distanza Δs, in questo breve intervallo, è facile da trovare, in quanto la velocità si mantiene costante. Esso vale:

$$\Delta s = v\,\Delta t. \tag{51}$$

Nell'intervallo compreso fra i tempi indicati con t_1 e t_2, la distanza totale percorsa si può trovare sommando i vari incrementi (di cui Δs è un tipico esempio) in corrispondenza di tutti i gradini della spezzata. Ripetendo questa operazione per gradini sempre più piccoli, come per la poligonale di tangenti, ci si avvicina sempre più alla vera distanza percorsa che corrisponde alla curva continua della velocità.

Tornando ora al tipico Δs, calcolato mediante l'equazione (51), si osservi il significato che esso ha nella Fig. 37 per comprendere l'altro aspetto dell'analogia accennata. Il prodotto $v\,\Delta t$ rappresenta l'area del sottile rettangolo con altezza v e base Δt. Quest'area equivale anche a Δs: cioè all'incremento di distanza durante l'intervallo Δt, nell'approssimazione del gradino.

A ogni gradino della spezzata disegnata corrisponde una di queste aree rettangolari: la loro somma da t_1 a t_2 rappresenta la distanza totale percorsa in questo intervallo. Questo è vero per ogni tipo di gradino; in particolare, quando i gradini diventano più piccoli, si verificano due cose interessanti. La prima è stata vista nel paragrafo precedente: l'aumento totale di distanza compreso fra i tempi t_1 e t_2, ricavato con l'approssimazione dei gradini, si avvicina sempre più al valore vero corrispondente alla curva continua della velocità. La seconda, che risulta chiara anche visivamente, è che l'area compresa fra la spezzata a gradini, l'asse orizzontale e le verticali per t_1 e t_2 si avvicina sempre più all'area compresa fra la curva continua, l'asse orizzontale e le verticali. Il risultato che si ottiene è che la distanza totale percorsa fra il tempo t_1 e il tempo t_2 è rappresentata dall'area compresa fra il grafico della velocità, l'asse orizzontale e le verticali che passano per t_1 e t_2. Questa conclusione è molto importante poiché significa che qualsiasi procedimento che permette di calcolare un'area può servire per effettuare un'integrazione. Prima di tornare ad applicare quest'idea al problema del lancio del piattello, si vedranno le notazioni convenzionali che riguardano l'integrazione. Come si ricorderà, il tasso di incremento di s nel tempo t, valutato per il breve intervallo Δt, era stato indicato con $\Delta s/\Delta t$. Per indicare il tasso di incremento istantaneo si era cambiata la notazione in:

$$v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t \tag{52}$$

sottintendendo che d sostituiva Δ quando gli incrementi Δt e Δs diventavano infinitamente piccoli. Il processo di contrazione dei gradini di una spezzata fino a proporzioni infinitesimali si indica con un analogo cambiamento di Δ in d, cosicché l'equazione (51), scritta per un gradino infinitesimale, diventa

$$\mathrm{d}s = v\,\mathrm{d}t. \tag{53}$$

L'operazione di somma di incrementi infinitesimi si indica con una S (che sta per Somma) alta e stretta e viene chiamata integrazione. Applicandola all'equazione (53) si scrive:

$$\int_{t=t_1}^{t=t_2} \mathrm{d}s = \int_{t=t_1}^{t=t_2} v\,\mathrm{d}t. \tag{54}$$

La S grande e stretta si chiama segno di integrale. La scritta alla sua base indica il valore di t dal quale inizia l'operazione di somma, mentre quella in alto indica il valore finale di t. Il membro di sinistra può essere scritto più chiaramente se si indica con s_1 il valore di s per $t = t_1$ e con s_2 il suo valore per $t = t_2$. Siccome l'effetto complessivo degli incrementi infinitesimi ds è il passaggio da s_1 a s_2, l'equazione (54) può essere scritta come:

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t. \tag{55}$$

che si legge 'esse-due meno esse-uno è uguale all'integrale da ti-uno a ti-due di vi rispetto a ti'. Spesso, invece di 'rispetto a ti' si dice 'in di-ti'. I valori di t scritti in basso ed in alto al segno di integrale si chiamano limiti di integrazione. La Fig. 38 riassume quanto appena detto.

Descrivendo questo tipo di nomenclatura si è di nuovo evitato di attribuire significato ai simboli, in modo da poter applicare il discorso indipendentemente da ciò che esprimono s, t e v. Si noti anche che le equazioni (52) e (53) possono essere ricavate l'una dall'altra. La derivazione e l'integrazione sono operazioni che tendono verso opposte direzioni.

Tornando ora al problema del piattello ed alla Fig. 32, si voglia rispondere al quesito «che altezza raggiungerà il piattello se non verrà colpito?». Nella Fig. 32 la velocità si mantiene positiva solo per i primi due secondi (l'oggetto aumenta la sua distanza dal punto iniziale). La distanza comincia poi a diminuire, cosicché il massimo viene raggiunto al tempo $t = 2$ s. Per calcolare questa distanza massima, si può usare l'analogia con l'area compresa fra il grafico e l'asse orizzontale nell'intervallo fra $t = 0$ e $t = 2$ s. L'area è triangolare con base di 2 s ed altezza 20 m s^{-1}, cosicché risulta:

$$1/2 \times \text{base} \times \text{altezza} = 1/2 \times 2 \text{ s} \times 20 \text{ m s}^{-1} = 20 \text{ m},$$

che è la soluzione esatta per il modello scelto (il modello, si ricordi, attribuiva un valore approssimato all'effetto della gravità e non teneva conto di altri fattori come la resistenza dell'aria, ecc.). Questo risultato mostra tra l'altro che dal grafico di Fig. 35 si poteva ricavare con esattezza la

Fig. 38

Analogia tra un'area e un integrale.

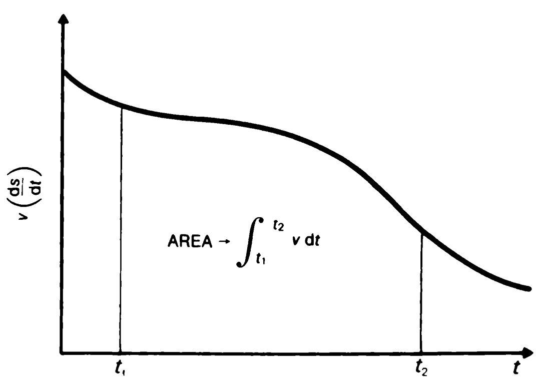
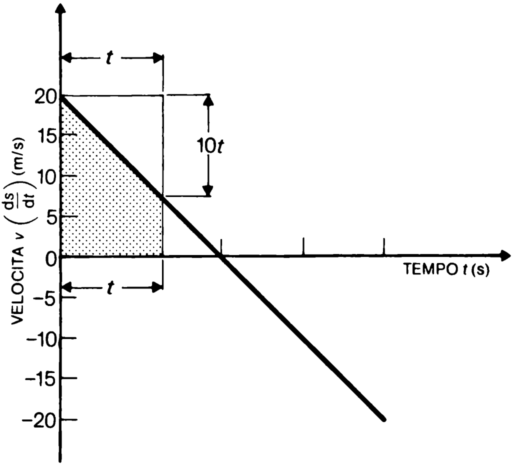


Fig. 39

Uso dell'analogia di Fig. 38 per un valore generico di *t*.



massima altezza, nonostante la grossolana scelta degli intervalli di tempo su cui esso era basato. (Osservando i due grafici sovrapposti di Fig. 36, si cerchi di capire perché e per quali altri tempi la poligonale di Fig. 36 dà gli stessi risultati della soluzione esatta.)

Continuando a seguire il moto del piattello attraverso l'analogia fra area e distanza, si può giungere a un'interessante osservazione. La posizione dell'oggetto dopo 3 s si può calcolare partendo da quella dopo 2 s e valutando il cambiamento avvenuto nel terzo secondo. L'area relativa è ancora triangolare, questa volta con base 1 s. La differenza è però che ora il triangolo si trova al di sotto dell'asse delle ascisse; l'altezza, letta sulla scala della velocità, è pari a -10 m s^{-1}, cosicché l'area risulta negativa:

$$1/2 \times 1 \text{ s} \times (-10 \text{ m s}^{-1}) = -5 \text{ m}.$$

Aggiungendo questa variazione, relativa al terzo secondo, al valore calcolato per $t = 2$ s (20 m) si ha $20 + (-5) = 20 - 5 = 15$ m. Il risultato è ragionevole poiché, dato che l'oggetto sta scendendo, la sua variazione di altezza è negativa.

L'analogia delle aree può dare una descrizione completa del movimento sotto forma di equazione. L'area calcolata di Fig. 39 rappresenta la distanza coperta nei primi *t* secondi del movimento. Quest'area è pari a quella del rettangolo meno il triangolo in alto a destra. Entrambe sono facili da calcolare:

distanza $s = (20 \text{ m s}^{-1} \times t \text{ s}) - (1/2 \times t \text{ s} \times 10\, t \text{ m s}^{-1})$,

cosicché

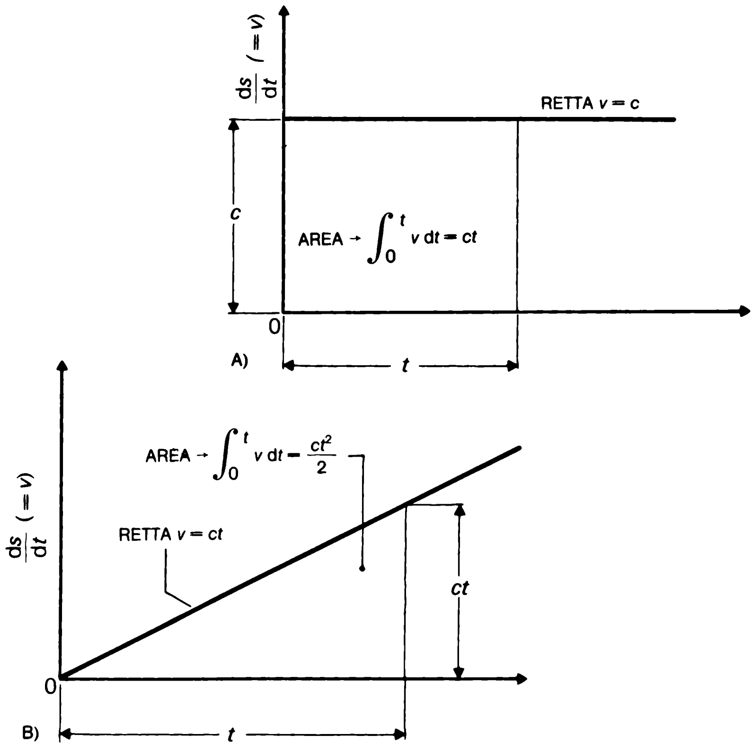
$$s = 20t - 5t^2. \tag{56}$$

Questa come ci si poteva aspettare dalla Fig. 35, non è che l'equazione di una parabola (si confronti l'equazione (41)).

Esercizio. Utilizzando l'equazione (56) si calcoli s a intervalli di 0,25 s a partire da $t = 0$ s. Si riportino i risultati in Fig. 35. A partire da questo grafico e dalla poligonale delle tangenti si cerchi la risposta alla seconda domanda del progettista: «Per quanto tempo il piattello volerà a un'altezza superiore a 5 m sopra la quota di lancio?». Il risultato che si ricava dalla poligonale sarà considerato sufficientemente accurato dal progettista?

Fig. 40

Risultati simbolici dell'analogia tra aree e integrali.



Tab. II - Relazioni tra spostamento e velocità

$\frac{ds}{dt}$	$s - s_0$ (oppure $\int_0^t v\, dt$)	note
c	ct	dalla Fig. 40a
ct	$ct^2/2$	dalla Fig. 40b

Usando un tempo generico, invece di un ben definito numero di secondi, come base delle aree, si può tentare una trattazione alternativa dei problemi di derivazione e integrazione. Chiamando s la distanza corrispondente a un tempo variabile t e s_0 la distanza per $t = 0$, la Fig. 40 permette di ricavare gli elementi della Tab. II. Cambiando l'intestazione della seconda colonna in s, cioè aggiungendo s_0 a ciascun elemento della colonna stessa, si ottiene la Tab. III.

Questa tabella dà le regole simboliche per l'integrazione passando dalla prima colonna alla seconda, e per la derivazione passando dalla seconda alla prima (la prima riga è stata ottenuta imponendo $c = 0$ in una qualunque delle altre due righe). La costante s_0 che nasce passando dalla

Tab. III - Relazioni tra spostamento e velocità

$\frac{ds}{dt}$	s
0	s_0
c	$ct + s_0$
ct	$ct^2/2 + s_0$

prima colonna alla seconda è la costante di integrazione già menzionata. La seconda e terza riga sono in realtà casi particolari di una regola più generale (che non sarà qui dimostrata). Secondo questa regola la riga ennesima della Tab. III si scriverebbe:

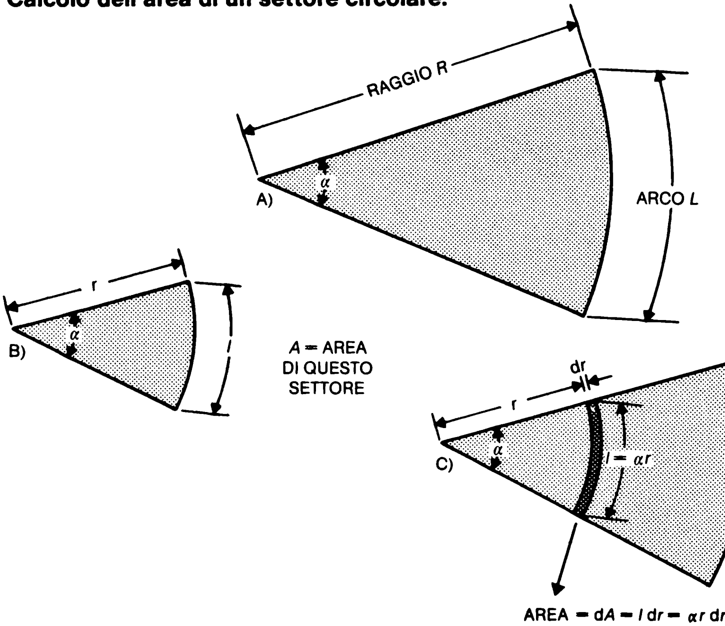
ct^n	$\frac{ct^{n+1}}{(n+1)} + s_0$

Alternativamente l'intestazione della Tab. III potrebbe essere:

v	$\int v\, dt$

Fig. 41

Calcolo dell'area di un settore circolare.



Si noti che qui non ci sono i limiti di integrazione che compaiono invece nella testata della seconda colonna. Un integrale di questo tipo si chiama integrale indefinito. Non c'è alcun bisogno di un limite superiore di integrazione in quanto gli elementi stessi della colonna implicano che t può variare (è stato qui usato t come limite superiore solo per chiarire il meccanismo della Fig.40 e renderlo compatibile con la formula dell'equazione (55)). La necessità di un limite inferiore viene eliminata dalla presenza della costante di integrazione (ma non ci si dilungherà qui a spiegarne il perché).

Queste osservazioni sui metodi simbolici di derivazione e integrazione sono state fatte solo per mostrare in che modo i modelli matematici possono essere vantaggiosamente sviluppati. Resta solo da aggiungere che quando un modello è esprimibile in forma quantitativa mediante equazioni semplici e ordinate, questi metodi simbolici si dimostrano molto validi. Migliaia di coppie di formule potrebbero essere inserite ad arricchire la Tab. III.

Prima di abbandonare l'argomento riguardante l'accumulazione di variazioni graduali, ecco un esempio, nel quale le variazioni non avvengono in funzione del tempo. Si tratta del problema di trovare l'area di un settore circolare, come quello illustrato in Fig. 41a. La forma del settore è fissata dal rapporto fra la lunghezza del suo arco, L, e del suo raggio, R. Questo rapporto può anche essere usato per misurare l'angolo, α, compreso fra i due raggi che delimitano il settore. In tal caso l'unità di misura degli angoli è il radiante

radiante

cioè l'angolo relativo a un settore il cui arco è lungo come il raggio. Un cerchio può essere visto come un settore di apertura pari a un angolo giro: se R è il raggio, la lunghezza totale dell'arco di cerchio (cioè la circonferenza) vale $2\pi R$, e l'angolo giro è pari a $2\pi R/R$, cioè 2π radianti. Per il settore di Fig. 41a si ha quindi $\alpha = L/R$, ovvero $L = \alpha R$. Allo stesso modo in Fig. 41b, essendo l'ampiezza del settore ancora α, sarà $l = \alpha r$. Si indichi con A l'area del settore di Fig. 41b, che per ora non si sa come calcolare. Osservando la Fig. 41c è però possibile vedere come cambia A quando si aumenta r di una quantità infinitesima $\mathrm{d}r$. L'aumento infinitesimale di A consiste nell'areola infinitesimale $\mathrm{d}A$, a forma di striscia ricurva, mostrata nella Fig. 41c. Dalla stessa figura si ha

$$\mathrm{d}A = \alpha r\,\mathrm{d}r. \tag{57}$$

Dividendo per $\mathrm{d}r$ entrambi i membri di quest'equazione si ottiene la derivata di A rispetto a r:

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r} = \alpha r. \tag{58}$$

Si confronti questo risultato con la terza riga della Tab. III. Facendo corrispondere ad A la s, a r la t, ad α la c, si vede che si può scrivere direttamente:

$$A = \frac{\alpha r^2}{2} + A_0 \tag{59}$$

essendo A_0 la costante di integrazione. La Fig. 41b mostra che A vale zero quando r vale zero, per cui, sostituendo questi valori nell'equazione (59), si ricava $A_0 = 0$. Sarà quindi:

$$A = \frac{\alpha R^2}{2}. \tag{60}$$

Un cerchio di raggio R, come già detto, non è che un settore con l'angolo pari a 2π ed il raggio pari a R. Se nell'equazione (60) si pone $\alpha = 2\pi$, si ottiene $A = \pi R^2$ che è la formula dell'area del cerchio. Questo è probabilmente l'unico modo, se si eccettua la misura diretta, per ottenere il risultato visto. La costante π non è misurabile esattamente nonostante sia stata calcolata con oltre 2000 decimali. Nella Bibbia (*II Cronache,* 4,2) è invece scritto che $\pi = 3$. Un grado di accuratezza intermedio fra questi estremi e adatto per qualunque tipo di modello può essere anche ottenuto mediante misure dirette.

Esercizio. Mostrare che in un bacino aperto di qualsiasi forma la derivata del volume d'acqua rispetto alla sua profondità è pari all'area della superficie libera. (Suggerimento: rifarsi al metodo usato per trovare la derivata dell'area di un settore circolare rispetto al raggio. Utilizzare un incremento infinitesimo della profondità dell'acqua.)

Esercizio. La Fig. 42 rappresenta la mappa con curve di livello (isoipse) di una valle che deve essere allagata per ricavarne un bacino artificiale. La posizione della diga è indicata dalla linea *AB*. Tracciare un grafico che mostri come varia l'area della superficie libera dell'acqua in funzione della profondità. (Suggerimento: è necessario calcolare le aree racchiuse fra le varie isoipse e la diga. A questo scopo, il metodo delle pelli di bue è probabilmente il più adatto. Bisogna contare il numero dei quadratini compresi fra due curve di livello. La procedura migliore è di evidenziare dapprima dei blocchi rettangolari, iniziando dai più grandi che sono completamente conte-

Fig. 42

Mappa della località proposta per l'insediamento di un bacino.

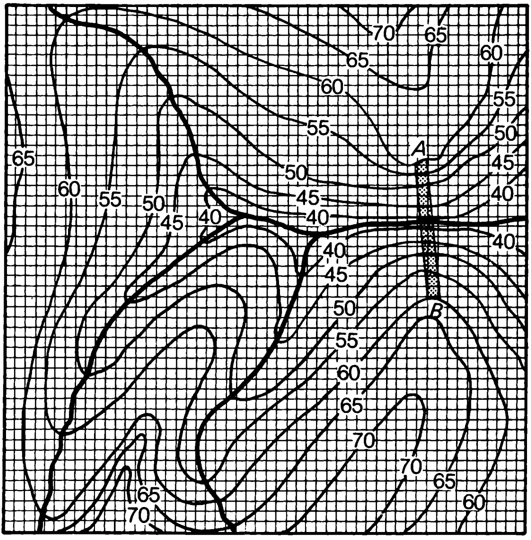
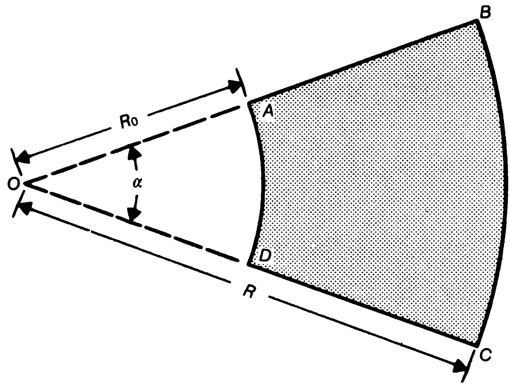


Fig. 43



nuti fra due curve, proseguendo con i più grandi che possono stare sui contorni dei precedenti e così via. Questo riduce di molto la necessità di contare singolarmente i quadratini. Sarà anche necessario valutare le frazioni di quadratino sui contorni irregolari. Questo può essere fatto direttamente oppure nella seguente maniera: si contino dapprima tutti i quadratini completamente interni a una curva, poi quelli che non hanno alcuna parte interna alla curva e si faccia la media dei due risultati ottenuti. Si possono anche contare i quadratini che hanno più di metà superficie all'interno e quelli che ne hanno più di metà fuori.)

Esercizio. Combinando i risultati dei due esercizi precedenti, si ricavi un grafico che mostri il volume dell'acqua del bacino in funzione della profondità. (Suggerimento: si può usare l'analogia delle aree o contando i quatratini oppure sostituendo al grafico continuo della superficie libera in funzione della profondità la sua approssimazione costituita da una curva a gradini. Alternativamente, si può usare l'approssimazione a gradini e la poligonale delle tangenti.)

Esercizio. Dalla Fig. 43 si vede che l'area del settore anulare *ABCD* si può calcolare sottraendo l'area del settore *OAD* da quella del settore *OBC*. Usate l'equazione (60) per trovare la formula e verificate che allo stesso risultato si può giungere sostituendo nell'equazione (59) il valore di A_0 ottenuto fissando $A = 0$ per $r = R_0$

Esercizio. Il modello di crescita di una popolazione si può approsssimare assumendo un tasso di natalità pari a *B* per mille persone all'anno ed un tasso di mortalità pari a *D* per mille persone all'anno. Il tasso di crescita è quindi $B - D$ per mille persone all'anno e la derivata rispetto al tempo della popolazione sarà $\mathrm{d}N/\mathrm{d}T = N(B - D)$ persone all'anno, essendo *N* il numero di persone (in migliaia di unità) che sono viventi al tempo *T*. In Brasile, in occasione del censimento del 1970, *B* risultò uguale a 38, *D* a 10 e *N* a circa 93 000. Utilizzando come scala orizzontale del tempo 1 cm = 5 anni e come scala verticale della popolazione 1 cm = 20 milioni di unità, si disegni un grafico per stimare l'entità della popolazione brasiliana fra gli anni 1970 e 2020, supponendo che restino immutati i valori di B e D.

(Suggerimento: si tracci una poligonale di tangenti: si vedrà che la pendenza del grafico dipende da N e non dal tempo.)

In questo paragrafo è stato considerato il problema dell'integrazione, l'operazione che valuta gli effetti cumulativi di continue variazioni graduali. Sono state considerate principalmente analogie di tipo grafico che riducevano il problema alla ricerca del grafico: ad esempio, di s in funzione di t, noto quello di ds/dt in funzione di t. Tipici problemi di integrazione sono quelli di trovare l'andamento della velocità di un oggetto nota la sua accelerazione e di trovare la distanza percorsa, nota la velocità. I due metodi visti per la soluzione di tali problemi sono la costruzione della poligonale delle tangenti e l'analogia fra aree e integrali. Questo secondo metodo è molto utile perché consente di utilizzare qualunque metodo noto per calcolare le aree ai fini dell'integrazione.

Si svolga ora l'esercizio 7 di autovalutazione.

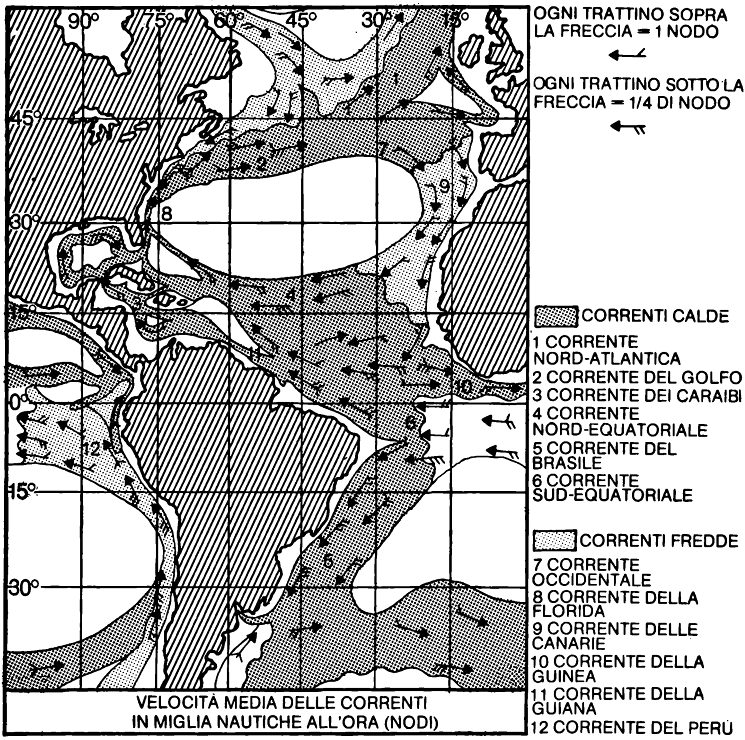
6.5 Modelli di grandezze orientate

L'analogia grafica di cui si parlerà in questo paragrafo non ha nulla a che vedere con i grafici e inoltre non necessita almeno qui, di particolari notazioni matematiche.

Capita sovente di dover costruire modelli di oggetti le cui caratteristiche fanno in qualche modo riferimento a una direzione. Un tipico esempio è costituito dalle correnti oceaniche. La Fig. 44 è una mappa delle correnti dell'oceano Atlantico che illustra il modo usato dai cartografi per risolvere questo problema. La direzione della corrente è indicata dalla freccia nera e la sua velocità è proporzionale al numero di rami della penna di coda. Questa rappresentazione è sufficiente dal punto di vista dell'informazione che se ne trae, ma non può essere usata per alcun altro scopo. Si può sviluppare una rappresentazione molto più interessante pensando a come descrivere i cambiamenti di posizione di un oggetto. Si supponga di disporre di un dischetto, con un piccolo foro centrale, su un foglio di carta bianca. La sua posizione può essere stabilita infilando la punta di una matita nel foro in modo da segnare sulla carta il punto di partenza A. Muovendo il disco e indicando la sua nuova posizione con B, è chiaro che la rappresentazione più semplice del cambiamento di posizione del dischetto

Fig. 44

Convenzioni adottate dai cartografi per la rappresentazione delle correnti oceaniche.



consiste in una freccia con la coda in *A* e la punta in *B*. La freccia non porta naturalmente traccia del percorso seguito dal dischetto per passare da *A* a *B*: qualunque esso sia stato, la freccia descrive semplicemente il cambiamento di posizione risultante. Un cambiamento di posizione di questo tipo sarà d'ora in poi indicato come

spostamento

spostamento. In Fig. 45a le due frecce rappresentano due spostamenti successivi, il primo da *A* a *B* e il secondo da *B* a *C*. Naturalmente, la coda della seconda freccia coincide con la punta della prima. La Fig. 45b mostra (come è ovvio) che lo spostamento complessivo del dischetto può essere semplicemente descritto dalla freccia che va da *A* a *C*.

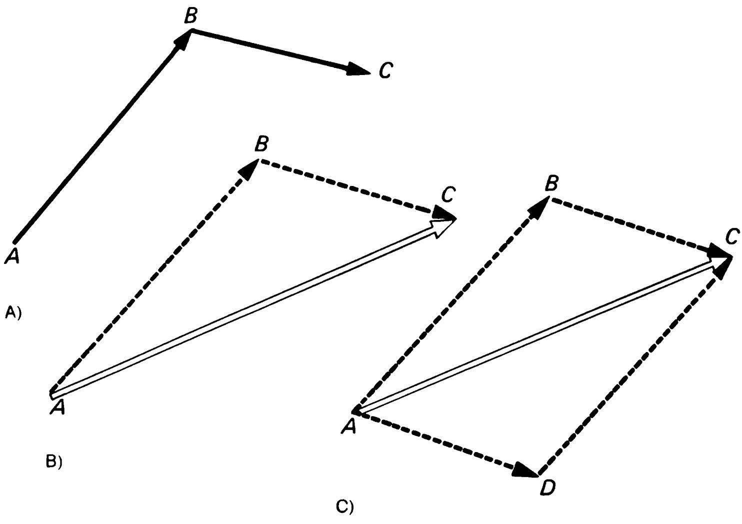
Lo spostamento del dischetto sarebbe anche potuto avvenire in due passi successivi, ciascuno rappresentabile con le stesse frecce di Fig. 45a, ma in ordine inverso (Fig. 45c).

È abbastanza naturale interpretare il significato di due frecce disposte punta contro coda come la somma di due spostamenti. Si potrebbe chiaramente proseguire concatenando frecce che rappresentano successivi spostamenti del dischetto. Dovunque si trovi la punta dell'ultima freccia, lo spostamento complessivo del disco potrà sempre essere rappresentato da un'unica freccia che vi giunge partendo da *A* e le stesse frecce, indipendentemente dall'ordine nel quale potranno essere sistemate, porteranno sempre allo stesso risultato.

Questo discorso sugli spostamenti potrà sembrare sterile in quanto la somma di due successivi spostamenti è intuitivamente molto facile da capire. Gli spostamenti non sono però le sole grandezze orientate che può capitare di

Fig. 45

Somma vettoriale di spostamenti: in A) **le frecce rappresentano spostamenti successivi; in** B) **determinazione dello spostamento equivalente a due spostamenti dati; in** C) **la somma dei due spostamenti non dipende dall'ordine con cui vengono presi.**



dover rappresentare. Se si pensa all'azione compiuta da chi cerca di muovere un oggetto tirandolo con una fune, è intuitivo che i due aspetti determinanti dell'azione sono l'entità dello sforzo e la direzione nella quale viene compiuto. Una forza è quindi caratterizzata da una grandezza e da una direzione e perciò può essere rappresentata mediante una freccia.

Il problema consiste nel verificare se la risultante di più forze può essere determinata graficamente, trattando le frecce che rappresentano le forze allo stesso modo di quelle che rappresentano gli spostamenti. Si vedrà che ciò è possibile, mediante un accorgimento che si basa sulla legge di Hooke, vista nel paragrafo 6.3 L'ELABORAZIONE MATEMATICA DELLE MISURE. Questa legge afferma che l'estensione elastica di una barra metallica è direttamente proporzionale alla forza che la produce. Una conseguenza molto importante della legge di Hooke è il cosiddetto principio di sovrapposizione degli effetti. Esso afferma che,

principio di sovrapposizione

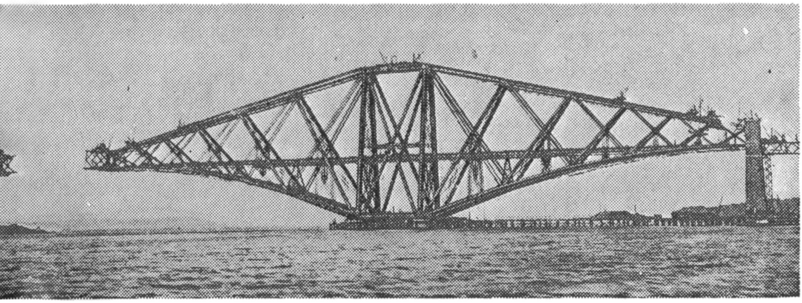
se la deformazione di un corpo elastico si mantiene entro limiti ristretti e qualunque sia la forma del corpo, l'allungamento elastico prodotto da due forze agenti simultaneamente può essere calcolato sommando gli allungamenti prodotti dalle due forze quando agiscono separatamente.

Il principio di sovrapposizione è un ottimo punto di partenza per la costruzione dei modelli di comportamento della maggior parte delle strutture che si incontrano nell'ingegneria.

Si immagini ora una colonna metallica corta a sezione perfettamente circolare fissata verticalmente a una fondazione rigida e recante in cima degli agganci con più funi. Esercitando una trazione orizzontale mediante una di queste funi, la cima della colonna subirà un piccolo spostamento nella stessa direzione. Questo è vero qualunque sia la direzione interessata perché, essendo la colonna circolare, tutte le direzioni sono equivalenti. Inoltre, poiché per la legge di Hooke l'entità dello spostamento è esattamente proporzionale alla forza che lo produce, lo spostamento della cima della colonna rappresenta per analogia la forza applicata. Il principio di sovrapposizione implica che, quando più forze sono applicate alla colonna, lo spostamento complessivo può essere calcolato, sommando gli spostamenti che esse avrebbero provocato agendo individualmente. Si ricava quindi che le regole per calcolare la risultante di un certo numero di forze che agiscono su di un punto (nell'esempio è la cima della colonna), sono le stesse che si usano per calcolare la

Fig. 46

Una costruzione a struttura reticolare: il ponte di acciaio per l'attraversamento del Firth of Forth, in Scozia, durante i lavori di completamento (il ponte venne finito nel 1881).



risultante di più spostamenti subiti da un oggetto. Le grandezze che possono essere rappresentate da frecce che si sommano seguendo la regola di Fig. 45b sono dette grandezze vettoriali o vettori. Sebbene ci si limiti al problema

grandezze vettoriali o vettori

in due dimensioni, la stessa analogia è valida in campo tridimensionale.

Un caso di particolare importanza, quando si usa questa analogia grafica per rappresentare le forze, si verifica quando il poligono dei vettori che rappresentano le forze agenti su di un punto è chiuso. Questo poligono viene solitamente indicato come poligono delle forze, e quando esso è chiuso l'effetto delle forze rappresentate si annulla, cioè le forze sono perfettamente bilanciate sull'oggetto su cui agiscono. Particolare interesse ha il caso in cui le forze agenti sono solo tre, per cui il poligono

triangolo delle forze

chiuso si riduce al triangolo delle forze.

Il poligono delle forze è usato estesamente nell'ingegneria per i progetti di strutture reticolate del tipo del ponte di Fig. 46. Come esempio di applicazione si prenda la struttura, molto meno impegnativa, il cui modello è disegnato schematicamente in Fig. 47. Gli schemi di questo tipo implicano sempre che ognuna delle aste numerate è sottoposta ad uno sforzo di semplice tensione, cioè ai suoi estremi sono applicate due forze uguali e contrarie (se le forze risultano negative, questo significa che lo sforzo è di

Fig. 47

Modello concettuale di una struttura reticolare.

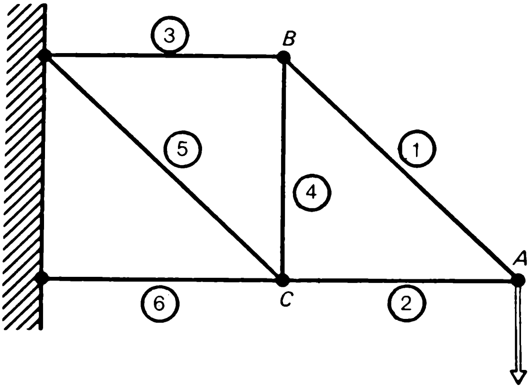
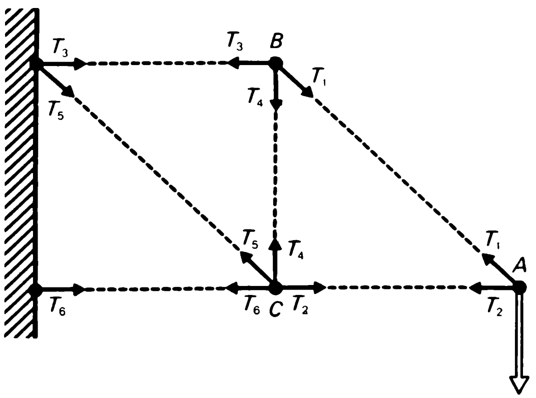


Fig. 48

Forze agenti sui nodi della struttura di Fig. 47.



compressione, cioè l'asta esercita una spinta contro i suoi giunti di unione alla struttura). La freccia verticale in *A* rappresenta il carico applicato alla struttura, pari nell'esempio a 1 kN.

In Fig. 48 le forze esercitate dalle aste sono disegnate come applicate alle loro estremità. Le frecce non rappresentano le forze in scala e sono contrassegnate con lettera e indice: T_1 sta per 'tensione nell'asta 1' e così via.

La Fig. 49a mostra il solo nodo di giunzione A e le tre forze che vi agiscono. In Fig. 49b, il triangolo delle forze relativo allo stesso nodo: esso viene ottenuto tracciando per prima la freccia verticale che rappresenta il carico di 1 kN in scala, e viene poi completato con la parallela a T_2 che passa per l'estremo inferiore e la parallela a T_1 per l'estremo superiore. Le punte delle frecce vengono poi disegnate sul perimetro del triangolo seguendo la direzione indicata dalla freccia verticale relativa al carico noto. I valori di T_1 e T_2 possono ora essere rilevati misurando la lunghezza delle frecce e rapportandola alla scala delle forze. Il lato del triangolo che rappresenta T_1 è diretto come in Fig. 49a, cosicché l'asta 1 risulta essere in tensione. Le frecce orizzontali relative a T_2 hanno però in Fig. 49a,b direzioni opposte, cosicché T_2 è negativa, ovvero l'asta 2 si trova in compressione (si rammenti che per convenzione le frecce indicano gli sforzi esercitati dall'asta sul giunto: se l'asta preme sul giunto, deve perciò trovarsi in compressione). Nel gergo dei tecnici, un'asta

puntone e tirante

soggetta a compressione si dice puntone; tirante in caso di trazione.

Se si conoscono la lunghezza e la direzione di un lato del triangolo, nonché le inclinazioni degli altri due, ci sono solo due modi per completare il triangolo. In Fig. 49b, infatti, si sarebbe potuto tracciare la prima parallela orizzontale per l'estremo superiore e per l'estremo inferiore. In ognuno

Fig. 49

Il nodo A con le forze che agiscono su di esso e, in B), il corrispondente triangolo.

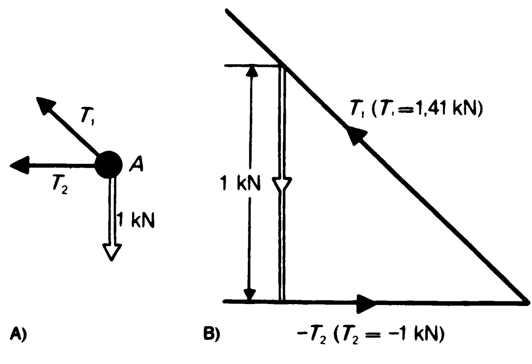
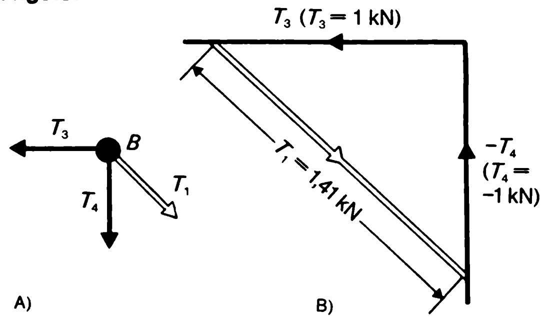


Fig. 50

Il nodo *B* con le forze che agiscono su di esso e, in B), il corrispondente triangolo.

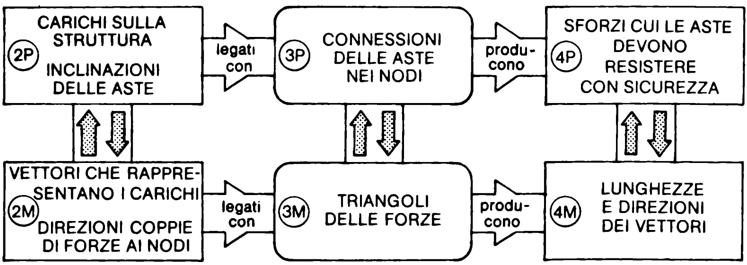


dei due casi si giunge allo stesso risultato. Il triangolo delle forze serve quindi a determinare il valore dí due forze quando siano note le loro direzioni. Una volta calcolata T_1 mediante la Fig. 49b, restano da determinare solo due forze al nodo *B*. La Fig. 50 illustra la costruzione del triangolo partendo dal tracciamento del lato noto, che rappresenta T_1.

Esercizio. Note T_2 e T_4 al giunto *C*, si calcolino le altre due incognite T_5 e T_6. (Suggerimento: sia T_2 che T_4 sono risultate negative, perciò si presti attenzione nel maneggiarle. Sul giunto *C* si può costruire il lato del triangolo a partire da T_2 e T_4. Ciò non è essenziale, ma probabilmente facilita le cose rispetto al tentativo di usare un poligono a quattro lati, avendo a che fare per la prima volta con questa analogia.)

Fig. 51

Analogia grafica per l'equilibrio delle forze (si confronti con la Fig. 1).



Si può ora vedere come, con questa semplice analogia, applicata in modo ripetitivo, si possono estrarre moltissime informazioni da sistemi piuttosto complessi. Con il suo aiuto si può comprendere il comportamento sotto carico di strutture molto complesse. In Fig. 51 è illustrato come l'uso di questa analogia si adatta allo schema di Fig. 1.

Si svolgano ora gli esercizi 8, 9, 10 di autovalutazione.

7 Un modello dalla scienza

Nelle varie branche della tecnologia, viene impiegato un grandissimo numero di materiali differenti, per scopi differenti altrettanto numerosi. In alcuni casi l'obiettivo è la produzione di un certo tipo di materiale, in altri invece è la scelta, in ogni fase di progetto, dei materiali più appropriati per un certo tipo di componente. A seconda delle funzioni, possono essere richieste ai componenti proprietà diverse come una conducibilità termica o elettrica particolarmente alta, o bassa, un'elevata resistenza alla corrosione o all'usura o a temperature altissime, un elevato rapporto resistenza/peso, alti o bassi coefficienti di attrito, marcato comportamento fotoelettrico o una qualunque di innumerevoli altre caratteristiche. Sono molto pochi, al contrario, i materiali che si trovano in natura già con tutti i requisiti adatti perché essi possano essere usati direttamente a un certo scopo.

I materiali più utili si ottengono mediante raffinazione o trasformazione di prodotti naturali mentre altri, come le plastiche, sono sintetizzati a partire da altre sostanze raffinate. Per capire, progettare e controllare queste trasformazioni, nonché per prevedere il comportamento dei materiali nelle diverse circostanze, i tecnologi fanno uso di modelli sviluppati da generazioni di fisici e chimici.

In fisica, in chimica e in tutte le scienze derivate c'è un gran numero di modelli, fra loro collegati, che si basano sul fatto che tutti i materiali sono composti da atomi di un piccolo numero di sostanze, un centinaio, chiamate elementi chimici. Questa è la cosiddetta ipotesi atomica, ma i modelli basati su di essa hanno avuto tali e tante dimostrazioni che chiamarla ancora ipotesi sa un po' di pedanteria.
Attraverso il modello trattato in questo capitolo, si cercherà di spiegare come gli atomi sono uniti per formare i composti chimici.

7.1 Gli elementi del modello

I mattoni elementari del modello devono simboleggiare gli atomi degli elementi chimici e inoltre, per far sì che il modello possa spiegare le interazioni fra atomi diversi, i vari elementi chimici dovranno essere rappresentati in maniera da poter essere distinti gli uni dagli altri. Il primo passo sarà quindi la ricerca di un modello della struttura dell'atomo. Per costruire un semplice modello di combinazione chimica, non è necessario uno studio molto complesso della struttura atomica. Beninteso, le seguenti considerazioni sono una versione semplificata di modelli assai più sofisticati.

7.1.1 Un modello della struttura dell'atomo. Gli atomi possono essere pensati come costituiti da tre soli componenti, le tre particelle subatomiche chiamate protoni, elettroni e neutroni. I protoni e i neutroni costituiscono il nucleo attorno al

Fig. 52

	numero	strati elettronici						
elemento	atomico	1oK	2oL	3oM	4oN	5oO	6oP	7oQ
idrogeno (H)	1	1						
elio (He)	2	2	0					
litio (Li)	3	2	1					
berillio (Be)	4	2	2					
boro (B)	5	2	3					
carbonio (C)	6	2	4					
azoto (N)	7	2	5					
ossigeno (O)	8	2	6					
fluoro (F)	9	2	7					
neo (Ne)	10	2	8	0				
sodio (Na)	11	2	8	1				
magnesio (Mg)	12	2	8	2				
alluminio (Al)	13	2	8	3				
silicio (Si)	14	2	8	4				
fosforo (P)	15	2	8	5				
zolfo (S)	16	2	8	6				
cloro (Cl)	17	2	8	7				
argo (A)	18	2	8	8	0			
potassio (K)	19	2	8	8	1			
calcio (Ca)	20	2	8	8	2			
elementi di transizione 3d		2	8					
gallio (Ga)	31	2	8	18	3			
germanio (Ge)	32	2	8	18	4			
arsenico (As)	33	2	8	18	5			
selenio (Se)	34	2	8	18	6			
bromo (Br)	35	2	8	18	7			
cripto (Kr)	36	2	8	18	8	0		

quale ruotano gli elettroni. L'elettrone possiede una carica negativa e il protone ne possiede una positiva della stessa grandezza di quella dell'elettrone. Il nucleo dell'atomo possiede una carica positiva pari alla somma delle cariche di tutti i suoi protoni. I neutroni non hanno carica e possono essere pensati come una specie di 'mastice' che impedisce ai protoni del nucleo di sfuggire sotto l'azione della mutua repulsione elettrostatica. (L'appendice 3 contiene una breve spiegazione delle cariche e delle forze elettrostatiche.)

Quando l'atomo è completo

numero atomico

è anche elettricamente neutro perché gli elettroni che circondano il nucleo sono in numero pari a quello dei protoni in esso contenuti. Questo numero è il cosiddetto

elemento	numero atomico	strati elettronici 1oK	2oL	3oM	4oN	5oO	6oP	7oQ
rubidio (Rb)	37	2	8	18	8	1		
stronzio (Sr)	38	2	8	18	8	2		
elementi di transizione 4d		2	8	18				
indio (In)	49	2	8	18	18	3		
stagno (Sn)	50	2	8	18	18	4		
antimonio (Sb)	51	2	8	18	18	5		
tellurio (Te)	52	2	8	18	18	6		
iodio (I)	53	2	8	18	18	7		
xeno (Xe)	54	2	8	18	18	8	0	
cesio (Cs)	55	2	8	18	18	8	1	
bario (Ba)	56	2	8	18	18	8	2	
elementi di transizione 5d		2	8	18	18			
	lantanidi 4f	2	8	18				
		2	8	18	32			
tallio (Tl)	81	2	8	18	32	18	3	
piombo (Pb)	82	2	8	18	32	18	4	
bismuto (Bi)	83	2	8	18	32	18	5	
polonio (Po)	84	2	8	18	32	18	6	
astato (At)	85	2	8	18	32	18	7	
rado (R)	86	2	8	18	32	18	8	0
francio (Fr)	87	2	8	18	32	18	8	1
radio (Ra)	88	2	8	18	32	18	8	2
elementi di transizione 6d		2	8	18	32	18		
	attinidi 5f	2	8	18	32			

numero atomico, che permette di distinguere fra loro atomi di differenti elementi chimici. Il numero di neutroni del nucleo non ha influenza sul numero atomico e non ha importanza nel modello della combinazione chimica.

Il numero di elettroni in un atomo completo è, come si è detto, uguale al numero atomico dell'atomo, ma non tutti gli elettroni sono nelle stesse condizioni. Essi debbono essere visti come disposti su strati successivi che abbracciano il nucleo come le squame di una cipolla; in ogni strato, inoltre, non può trovarsi più di un certo numero di elettroni.

La Fig. 52 mostra la disposizione degli elettroni nei vari strati degli elementi chimici. La numerazione degli strati aumenta dall'interno verso l'esterno. Nello schema vi sono dei vuoti, come si può vedere dai salti nel numero atomico a cavallo delle righe, per gli elementi di transizione.

7.2 Interazioni nel modello

I processi di combinazione chimica vengono spiegati con perdite, acquisti o cambiamenti di disposizione degli elettroni degli atomi. Gli elettroni degli strati più esterni degli atomi sono quelli che vengono principalmente interessati da queste operazioni e per semplicità si assumerà che solo gli elettroni dello strato più esterno vi partecipino. Ci si concentrerà quindi sulle colonne esterne della Fig. 52, limitate dalle linee verticali più a destra. Gli elettroni dello strato esterno verranno chiamati elettroni di valenza mentre

valenza

il resto dell'atomo (il nucleo e gli strati inferiori) verrà indicato come nocciolo.

Un modo di rappresentare l'atomo di un elemento è quello di scrivere il suo simbolo, a indicare il nocciolo, attorniato da tanti pallini neri che indicano gli elettroni di valenza. Ad esempio, gli atomi del fluoro, cloro e bromo possono essere rappresentati in questo modo (si controlli con Fig. 52):

$$:\dot{\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{F}}}: \quad :\dot{\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{Cl}}}: \quad :\dot{\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{Br}}}:$$

Questi elementi sono molto simili fra loro e la regola che il comportamento chimico è determinato dal numero di elettroni di valenza implica chiaramente che è opportuno classificare gli elementi in funzione di questo numero. Nella Tab. IV appare questa classificazione: ai gruppi di elementi aventi lo stesso numero di elettroni di valenza è stato assegnato questo stesso numero come numero di gruppo. Nella tabella si notano alcune irregolarità: l'idrogeno è stato

Tab. IV - Tabella periodica degli elementi semplificata

periodo \ gruppo	I	II	III	IV	V	VI	VII	0
1	H						H	He
2	Li	Be	B	C	N	O	F	Ne
3	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar
4	K	Ca	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
5	Rb	Sr	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
6	Cs	Ba	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn

sistemato in testa a due gruppi; il gruppo più a destra è stato indicato con il numero 0; l'elio compare nel gruppo 0. Queste due ultime osservazioni concordano innanzitutto con la doppia casella che compare in Fig. 52 sulla destra delle linee orizzontali indicate in grigio. Gli elementi del gruppo zero sono chiamati gas inerti o gas nobili, in quanto non si combinano chimicamente con gli altri elementi (anche se si è avuta ormai la prova di un'alleanza fra plebe e nobiltà, ad esempio nel composto XeO_3). Sembra perciò che per un atomo l'avere otto elettroni sullo strato più esterno (solo due nel caso dell'elio nello strato K), o non averne affatto da scambiare con gli altri atomi, sia la stessa cosa. È quindi ragionevole considerare l'atomo di un gas inerte come se avesse un ulteriore strato vuoto esterno a quello che contiene elettroni, donde l'attribuzione dello 0 come numero del gruppo. In questo modello semplificato la regola

possibilità di combinazione chimica

che stabilisce le possibilità di combinazione chimica è che la configurazione dei gas inerti ha in sé qualcosa di speciale che gli atomi cercano di raggiungere mediante scambi di elettroni.

I dettagli di questi meccanismi saranno meglio spiegati con esempi di comportamento del modello. Durante la lettura del prossimo paragrafo sarà opportuno fare frequenti riferimenti alla Fig. 52 e alla Tab. IV.

7.3 Funzionamento del modello

L'unico gas inerte la cui configurazione elettronica sia accessibile da parte dell'atomo di idrogeno è l'elio. Infatti due atomi di idrogeno possono disporre complessivamente di due soli elettroni che sono però sufficienti per soddisfare la richiesta. Uno dei 'contratti' che possono essere stipulati fra due atomi è infatti quello che prevede la compartecipazione al possesso di un doppietto elettronico.

Il risultato di questa operazione è mostrato in Fig. 53: nel primo schema appaiono i due atomi di idrogeno nella schematizzazione nocciolo + elettroni di valenza; in b) due atomi si sono avvicinati e i loro elettroni hanno formato un doppietto; in c) i cerchietti mostrano che ognuno dei due noccioli può accedere al doppietto e raggiungere di conseguenza la configurazione dell'elio. Nel tentativo di mantenere questa situazione che li soddisfa entrambi, i due atomi di idrogeno restano legati e formano una molecola di idrogeno.

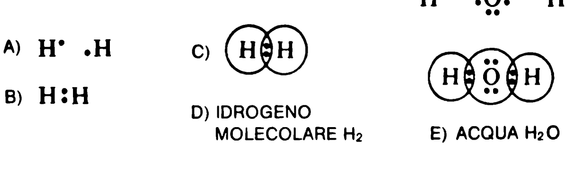
Nella rappresentazione convenzionale (Fig. 53d) l'indice 2 aggiunto al simbolo H indica che nella molecola di idrogeno sono presenti due atomi.

molecola

La Fig. 53e illustra un esempio un po' più complesso; la combinazione di due atomi di idrogeno con uno di ossigeno per formare una molecola d'acqua. Come nell'esempio precedente, ogni nocciolo di idrogeno può accedere al doppietto elettronico che ne soddisfa la stabilità, mentre il nocciolo di ossigeno può raggiungere, attraverso la compartecipazione, la configurazione del neo, con otto elettroni sullo strato esterno. In generale non c'è alcun bisogno di specificare qual è il gas inerte di cui un atomo acquisisce la configurazione attraverso una combinazione chimica. Per tutti gli elementi che verranno considerati in seguito, un nocciolo circondato da otto elettroni o da nessuno rappresenterà una generica configurazione di gas inerte. L'unica eccezione sarà costituita

Fig. 53

A sinistra, legami atomici in una molecola d'idrogeno. A destra, legami atomici in una molecola d'acqua.



dall'idrogeno, il cui nocciolo dovrà sempre tendere verso la configurazione con due elettroni.

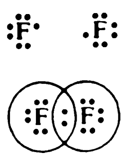
Ogni doppietto elettronico del tipo di quelli racchiusi da

legame covalente

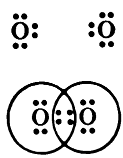
più di un cerchietto nella Fig. 53 costituisce un legame covalente. La Fig. 54 mostra ulteriori esempi di legami

Fig. 54

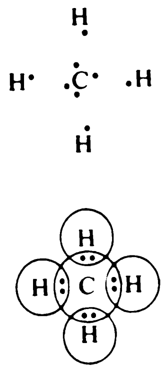
Altri esempi di legami covalenti.



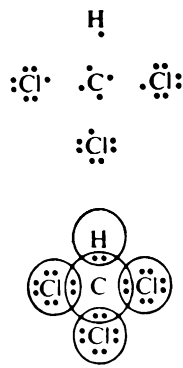
A) FLUORO MOLECOLARE F_2



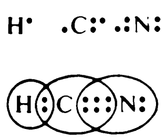
B) OSSIGENO MOLECOLARE O_2



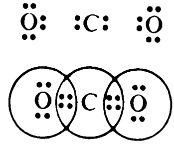
C) METANO CH_4
(GRISÙ, GAS DELLE PALUDI)



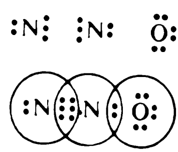
D) TRICLOROMETANO $CHCl_3$
(CLOROFORMIO)



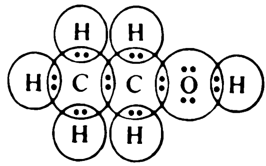
E) ACIDO CIANIDRICO
(ACIDO PRUSSICO)



F) ANIDRIDE CARBONICA CO_2
(LE BOLLICINE
DELL'ACQUA MINERALE)



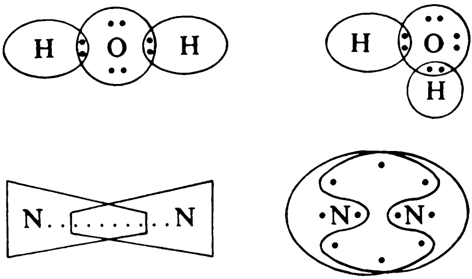
G) OSSIDO DI DIAZOTO N_2O
(PROTOSSIDO D'AZOTO;
È IL GAS ESILARANTE)



H) ALCOOL ETILICO C_2H_5OH

Fig. 55

Rappresentazioni grafiche diverse, ma assolutamente identiche dal punto di vista concettuale, delle stesse molecole.



covalenti, a proposito dei quali occorre fare un paio di osservazioni. La Fig. 54a illustra la formazione di una molecola di fluoro attraverso un legame covalente. La Fig. 54b è invece relativa alla formazione di una molecola di ossigeno: in questo caso due coppie di elettroni sono contemporaneamente messe in comune dai due atomi, tra i quali si forma perciò un

doppio legame covalente

doppio legame covalente. La Fig. 54c,d mostra molecole formate da diversi tipi di atomi: il nome del secondo composto, come si può vedere, è ricavato da quello del primo. In Fig. 54e compare un triplo

triplo legame covalente

legame covalente fra l'atomo di carbonio e quello di azoto, mentre nella Fig. 54f vi sono due doppi legami.

In Fig. 54g i due elettroni che costituiscono il legame azoto-ossigeno provengono entrambi dall'atomo di azoto: questo tipo di legame viene talvolta indicato come legame dativo (i legami dativi costituiscono

legame dativo

un'eccezione a una semplice regola che verrà enunciata più avanti). L'ultimo schema di Fig. 54 illustra un modo particolare di scrivere le formule delle molecole: si scrive C_2H_5OH, invece di C_2H_6O, in quanto i gruppi di atomi C_2H_5 e OH compaiono con lo stesso tipo di legami in molti composti. Essi vengono semplicemente indicati come gruppi: qui si tratta del gruppo etilico e del gruppo idrossilico.

Un gruppo ha sempre uno o più legami liberi (elettroni spaiati) e non è mai un'entità chimica autosufficiente. I gruppi si rivelano molto utili come mattoni elementari per costruire molecole complesse e le formule chimiche espresse in questi termini contengono già un'informazione di tipo strutturale.

Un'osservazione di importanza generale è illustrata in Fig. 54e,g dove gli elettroni del triplo legame sono disposti in maniera diversa. Essa nasce dal fatto che la rappresentazione delle molecole che si è scelta, pur essendo apparentemente figurativa, non ha alcun riscontro con la forma reale delle molecole. Non si tratta di corrispondenza elementare. La Fig. 55 infine chiarisce il principio importantissimo secondo cui nell'uso di un modello non ci si deve lasciar fuorviare dalle caratteristiche irrilevanti (che sono tuttavia contenute nel blocco 1 M di Fig. 1). Gli schemi di Fig. 55 mostrano soltanto quali degli atomi sono legati in modo covalente e con quali altri: nulla in più di tanto.

Esercizio. Usando il modello nocciolo + elettroni di valenza si veda quali molecole si possono costruire disponendo dei seguenti atomi:

a) uno di azoto e un numero a piacere di atomi di idrogeno;
b) uno di fosforo e un numero a piacere di atomi di idrogeno;
c) uno di arsenico e un numero a piacere di atomi di idrogeno;
d) uno di antimonio e un numero a piacere di atomi di idrogeno;
e) uno di zolfo e un numero a piacere di atomi di idrogeno;
f) due di cloro e un numero a piacere di atomi di ossigeno.

Risposta. Si veda la Fig. 56.

Esercizio. Con lo stesso modello, determinare i legami della molecola di etere dimetilico $(CH_3)_2O$. (Si noti il deponente attribuito ad un gruppo per mostrare che esso compare due volte nella stessa molecola.)

Risposta. Si veda la Fig. 57.

Esercizio. Scrivere la formula dell'etere dimetilico e dell'etanolo (il composto di Fig. 54h) senza usare la simbologia dei gruppi; confrontare i risultati.

Risposta. Entrambi i composti hanno formula C_2H_6O. Essi sono isomeri, cioè composti aventi egual numero e tipo di atomi, che vi sono però disposti in maniera diversa.

Esercizio. Si conoscono sostanze chimiche che hanno formula NO, NO_2, ClO_2 Perché il semplice modello del legame covalente non può darne spiegazione?

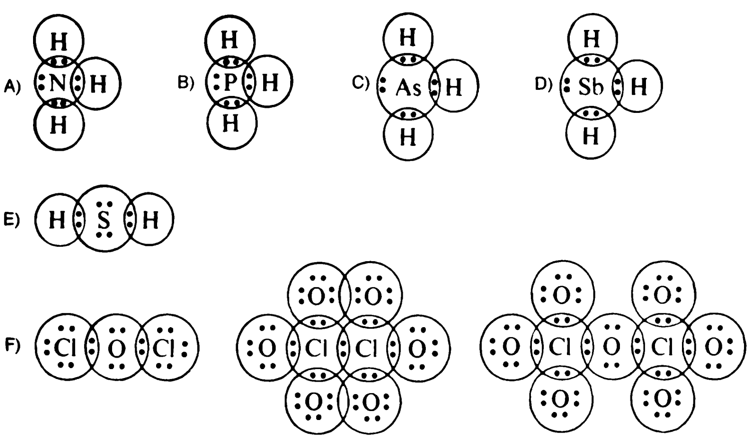
Risposta. In ognuno degli esempi indicati, il numero totale degli elettroni di valenza in gioco è dispari. Il modello visto, invece, può spiegare soltanto legami che coinvolgono doppietti elettronici.

Un'osservazione che riguarda la nomenclatura dei composti chimici. Un tempo ogni composto chimico aveva un nome speciale come alcool, etere, vetriolo, ecc. Da questi nomi correnti non era possibile risalire alla struttura chimica del composto. Recentemente, invece, è stata adottata dai chimici una nomenclatura sistematica (per esempio etanolo, acido solforico) che permette di risalire immediatamente al tipo di composizione della molecola. Questi nomi sono essi stessi modelli del composto che

nomenclatura sistematica

rappresentano. Come esercizio si potrebbe cercare di dedurre, a partire dai nomi che sono stati indicati, alcune delle regole che permettono di battezzare i composti chimici. Ovviamente sono molti i vantaggi di usare una nomenclatura sistematica. Molti nomi volgari però sono ormai così familiari che si è costretti ad indicarli per permettere di riconoscere la sostanza in questione, e passerà ancora

Fig. 56



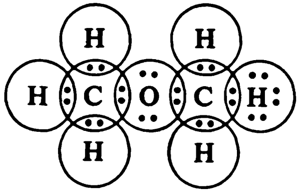
MONOSSIDO DI CLORO Cl_2O (ANIDRIDE IPOCLOROSA)

ESAOSSIDO DI DICLORO Cl_2O_6

EPTAOSSIDO DI DICLORO Cl_2O_7 (ANIDRIDE PERCLORICA)

Fig. 57

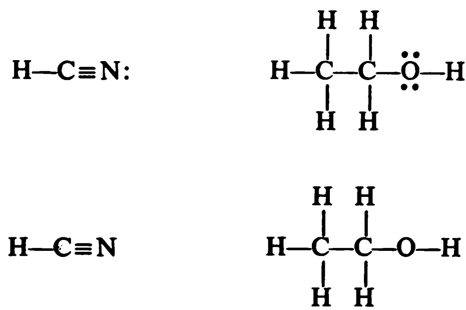
La molecola di etere dimetilico.



ETERE
DIMETILICO

Fig. 58

Altre rappresentazioni possibili per le molecole di Fig. 54 in E) **e** H).



molto tempo prima che essi scompaiano dall'uso comune.
Un modo semplice e rapido per indicare un legame covalente è quello di rappresentarlo con un trattino che unisce i due noccioli legati al doppietto elettronico che essi hanno in comune. I pallini neri possono ancora essere usati, quando lo si ritenga necessario, per indicare gli elettroni non condivisi; o, se si preferisce, la presenza di questi ultimi può essere sottintesa. Per esempio le molecole in Fig. 54e,h possono essere rappresentate come indicato in Fig. 58.
I pallini neri sono solitamente tralasciati, almeno finché non occorre farvi un riferimento specifico.
Nella formazione di un legame covalente un atomo di solito acquista soltanto un elettrone ai fini della saturazione del suo strato di valenza. Gli atomi di idrogeno hanno solo bisogno di completare il doppietto elettronico, mentre tutti gli altri tentano di completare l'ottetto. Si può dire che l'atomo di idrogeno ha soltanto un buco libero nel suo strato

di valenza, mentre tutti gli altri hanno tanti buchi quanti sono gli elettroni che mancano al completamento dell'ottetto. Una semplice regola (che però, come si vedrà, non è sempre verificata) è che il numero di legami covalenti che un atomo può formare è pari al numero di buchi o vacanze elettroniche sul suo strato di valenza. (Questa è una delle ragioni per cui l'idrogeno si comporta similmente al fluoro, al cloro, al bromo ed allo iodio, ed è la stessa ragione per cui esso è stato messo in testa alla colonna che comprende il VII gruppo.)

Esercizio. a) Si schematizzino nuovamente le molecole di Fig. 54 usando i trattini fra i noccioli. Per quali molecole non è valida la regola: numero di legami covalenti = numero di vacanze elettroniche? Perché?

b) C'è qualche altra ragione che spieghi la non validità della regola? (Suggerimento: si provi ad applicarla al boro.)

c) Usando i trattini si veda quali tipi di molecole si possono costruire partendo da tre atomi di carbonio e da un numero di atomi di idrogeno a volontà.

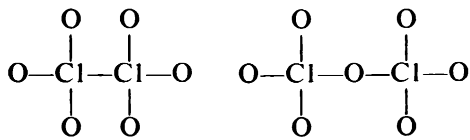
Risposta. a) La regola non è più valida quando si formano legami di tipo dativo. Le due molecole incontrate in un precedente esercizio, Cl_2O_6 e Cl_2O_7, ne forniscono un esempio limite (Fig. 59): in entrambi i casi ogni atomo di cloro fornisce gli elettroni necessari per tre legam dativi, portando a quattro il numero totale di suoi legami. Gli atomi di ossigeno interessati da questi legami dativi formano un solo legame covalente ciascuno.

b) L'atomo di boro ha cinque vacanze nel suo strato di valenza. Se fosse possibile formare cinque legami covalenti, il suo nocciolo sarebbe circondato da dieci elettroni, mentre il modello ne prevede al massimo otto.

c) I composti teoricamente possibili (si tratta di idrocarburi) sono indicati in Fig. 60 (quelli con il punto di domanda probabilmente non esistono in natura).

I legami covalenti non sono gli unici che possono tenere uniti gli atomi. Si consideri la situazione illustrata in Fig. 61. Il primo schema mostra un atomo di litio e un atomo di idrogeno, ognuno con un elettrone di valenza. In b) gli

Fig. 59



atomi sono stati avvicinati in modo da formare un doppietto elettronico. Il cerchietto di destra in c) mostra che il nocciolo dell'idrogeno cerca di catturare il doppietto di elettroni (come accadeva in Fig. 53), ma il cerchietto di sinistra mostra che il litio ne fa volentieri a meno. Il litio può raggiungere la configurazione dell'elio semplicemente vuotando il suo strato di valenza (si ricordi che un nocciolo circondato sia da otto che da zero elettroni simula sempre la configurazione di un gas nobile).

Liberandosi del suo elettrone di valenza, l'atomo di litio perde una unità di carica elettronica negativa e, siccome l'atomo era in origine completo e neutro, il nocciolo si trova ora ad avere un'unità di carica positiva non compensata. In queste condizioni

ione positivo

esso viene indicato come ione positivo di litio, rappresentato con Li^+. L'atomo di idrogeno cattura l'elettrone e acquista di conseguenza una carica negativa non bilanciata: diventa in tal modo ione negativo di

ione negativo

idrogeno, ovvero ione idruro. I due ioni così creati hanno cariche opposte cosicché si attraggono elettrostaticamente formando un composto ionico (o eteropolare): l'idruro di litio. La formula di questo composto

composto ionico (o eteropolare)

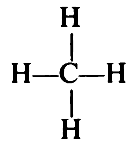
è LiH ovvero, mettendo in rilievo la sua natura ionica, Li^+H^-.

Gli atomi degli elementi sulla sinistra della Tab. IV possono formare ioni positivi svuotando i loro strati di valenza. Tipici ioni di questo genere sono Na^+, Mg^{2+}, Al^{3+}. Gli atomi sulla destra della stessa tabella possono invece riempire i loro strati di valenza formando ioni negativi del tipo Cl^-, O^{2-}. Ioni del tipo Mg^{2+} si formano più difficilmente rispetto a quelli del tipo Na^+. Strappando a un atomo di magnesio un elettrone, la carica positiva che si crea avrà l' effetto di legare più strettamente al nocciolo il rimanente elettrone di valenza. Si capisce che in questo modo gli elementi sulla destra della tabella sono i meno disponibili alla formazione di ioni positivi. Con lo stesso tipo di argomenti si può spiegare perché gli elementi sulla sinistra non tendono a formare ioni negativi.

Nei composti ionici, gli elettroni di valenza sono distribuiti fra gli atomi; ma la somma delle cariche positive e negative che si formano sugli ioni deve sempre annullarsi. Per questo motivo l'ossido di magnesio (materiale di cui sono

Fig. 60

Alcune classi di idrocarburi.

CLASSE DI COMPOSTI	UN ATOMO DI CARBONIO
ALCANI: IDROCARBURI SATURI CON SOLO LEGAMI SEMPLICI; COMPOSTI MOLTO STABILI	 METANO

fatti i refrattari e stranamente anche gli aghetti pungenti delle ortiche) ha la formula MgO mentre il cloruro di magnesio ha formula $MgCl_2$.

Esercizio. Riempire le caselle vuote della Tab. V con le formule dei composti formati dagli ioni negativi e positivi delle corrispondenti righe e colonne.

Fig. 61

Come si formano i composti ionici.

A) $Li^{\bullet}$ $\bullet H$

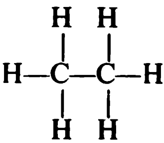
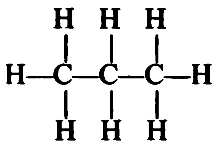
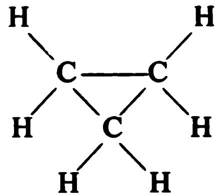
B) Li :H

C) Li :H

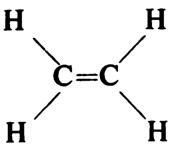
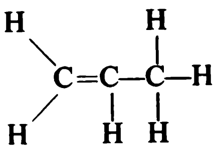
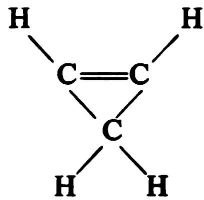
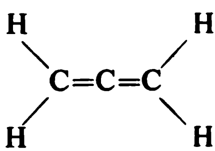
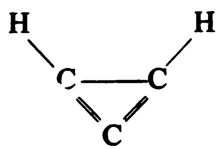
IDRURO DI LITIO Li^+H^-

Tab. V - Formazione di composti ionici

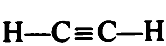
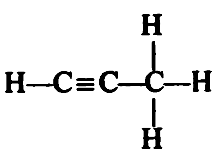
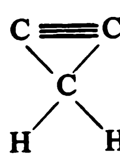
ioni positivi / ioni negativi	Na^+	Mg^{2+}	Al^{3+}
Cl^-		$MgCl_2$	
O^{2-}		MgO	
N^{3-}			

DUE ATOMI DI CARBONIO	TRE ATOMI DI CARBONIO	COMPOSTI AD ANELLO CON TRE ATOMI DI CARBONIO
 ETANO	 PROPANO	 CICLOPROPANO (INSTABILE) CLASSE: CICLOALCANI

ALCHENI:
IDROCARBURI INSATURI CON ALMENO UN DOPPIO LEGAME;
COMPOSTI MODERATAMENTE REATTIVI

 ETENE (ETILENE)	 PROPENE (PROPILENE)	 CICLOPROPENE? CLASSE: CICLOALCHENI
	 PROPADIENE?	 CICLOPROPADIENE? CLASSE: CICLOALCHENI

ALCHINI:
IDROCARBURI INSATURI CON ALMENO UN TRIPLO LEGAME;
COMPOSTI ESTREMAMENTE REATTIVI

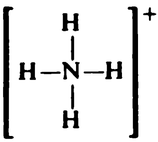
 ETINO (ACETILENE)	 PROPINO (METILACETILENE)	 CICLOPROPINO? CLASSE: CICLOALCHINI

Gli ioni semplici formati da singoli atomi non sono sufficienti a spiegare il grandissimo numero di composti ionici. Gli ioni si possono formare anche per gruppi di atomi nei quali i legami sono di tipo covalente. La Fig. 62 mostra qualche esempio di ioni e suggerisce le regole per trovarne il

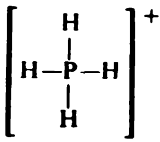
Fig. 62

Alcuni esempi di ioni, positivi e negativi.

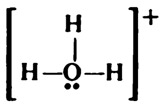
IONI POSITIVI



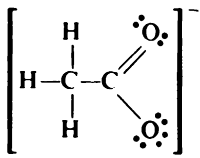
AMMONIO $(NH_4)^+$



FOSFONIO $(PH_4)^+$

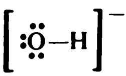


IDRONIO $(H_3O)^+$

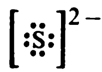


ACETATO $(CH_3COO)^-$

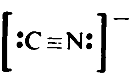
IONI NEGATIVI



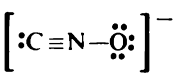
OSSIDRILE $(OH)^-$



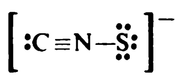
SOLFURO S^{2-}



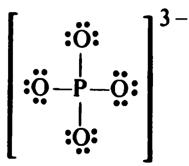
CIANURO (CN)–



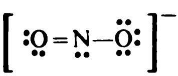
CIANATO $(CNO)^-$



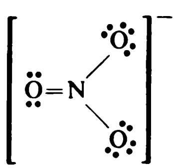
TIOCIANATO $(CNS)^-$



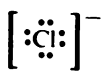
ORTOFOSFATO $(PO_4)^{3-}$



NITRITO $(NO_2)^-$



NITRATO $(NO_3)^-$

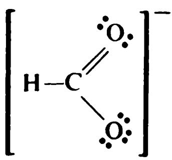


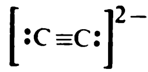
CLORURO Cl^-

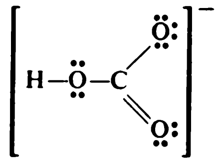
nome. Si controlli la carica portata da ciascuno ione valutando il numero di elettroni di valenza presenti su di esso (si conti 1 per ogni pallino nero e 2 per ogni trattino). Si paragoni quindi il risultato con il numero totale di elettroni di valenza che dovrebbero possedere gli atomi prima di ionizzarsi.

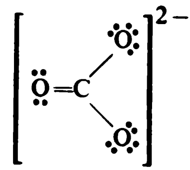
Lo ione idronio H_3O^+ e lo ione ossidrile OH^- hanno un interesse particolare. Essi possono essere originati da due molecole di acqua che reagiscono secondo lo schema di Fig. 63.

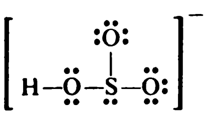
Il nocciolo di idrogeno può però facilmente ritornare

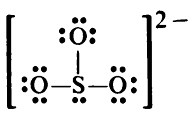

FORMIATO $(HCOO)^-$

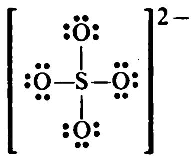

CARBURO $(C_2)^{2-}$

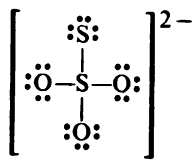

BICARBONATO $(HCO_3)^-$

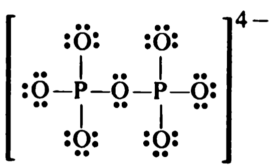

CARBONATO $(CO_3)^{2-}$

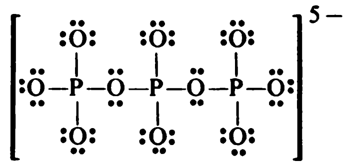

BISOLFITO $(HSO_3)^-$

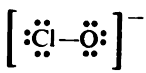

SOLFITO $(SO_3)^{2-}$

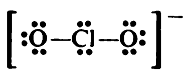

SOLFATO $(SO_4)^{2-}$

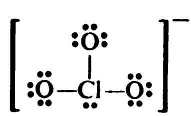

TIOSOLFATO $(S_2O_3)^{2-}$


BIFOSFATO $(P_2O_7)^{4-}$


TRIFOSFATO $(P_3O_{10})^{5-}$


IPOCLORITO $(ClO)^-$


CLORITO $(ClO_2)^-$


CLORATO $(ClO_3)^-$

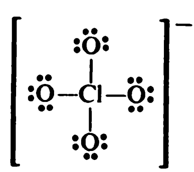
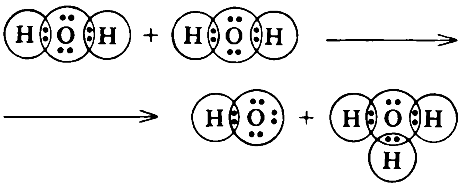

PERCLORATO $(ClO_4)^-$

Fig. 63



$$2H_2O \rightarrow OH^- + H_3O^+$$

sulla prima molecola ripristinando le due molecole d'acqua iniziali, cosicché bisognerebbe disegnare una freccia in entrambe le direzioni nell'equazione che compare in basso nella figura:

$$2H_2O \rightleftharpoons H_3O^+ + OH^-. \qquad (61)$$

Questa è un'equazione chimica. Si noterà che in entrambi i membri compare lo stesso numero di atomi della stessa specie e che è rispettata anche la carica elettrica totale. Si può dire che c'è lo stesso numero di noccioli e lo stesso numero di elettroni di valenza da entrambi i lati, sebbene questi elettroni non siano esplicitamente indicati. L'uguaglianza espressa in questi termini in un'equazione chimica deriva dal rispetto di due principi detti di conservazione della materia e di conservazione della carica. Sebbene questi principi non siano stati mai menzionati prima d'ora, essi sono stati di fatto ammessi implicitamente.

La corrente elettrica non è altro che movimento di cariche per cui, se lo ione H_3O^+ può muoversi nell'acqua in un senso mentre lo ione OH^- lo può fare in senso opposto, ci si deve aspettare che l'acqua possa condurre la corrente elettrica. In realtà lo spostamento fisico degli ioni non è assolutamente essenziale. La Fig. 64 mostra in che modo i noccioli di idrogeno (che non sono altro che singoli protoni) possono indirizzare i propri legami da una molecola all'altra producendo come unico effetto il movimento di un'unità di carica elettrica attraverso l'acqua. Siccome lo ione idronio H_3O^+ può facilmente far circolare i protoni, si può ignorare la presenza della molecola d'acqua nello ione idronio e parlare semplicemente del protone come se si trattasse di uno ione positivo di idrogeno, H^+. Questa semplificazione, quasi sempre usata dai chimici, spiega anche la disposizione dell'idrogeno nel I gruppo della Tab. IV insieme agli elementi i cui ioni hanno un'unica carica positiva.

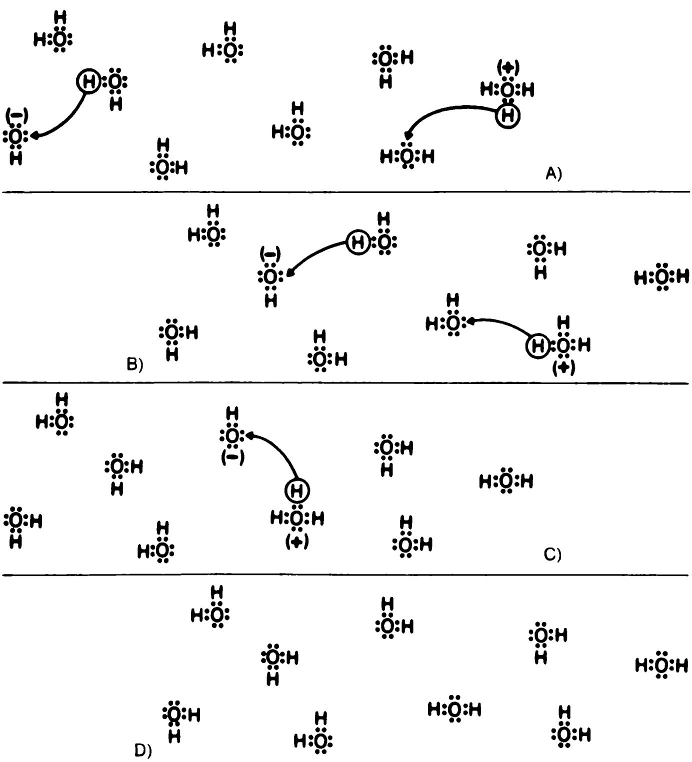
Contrariamente alle possibilità suggerite dalla Fig. 64, l'acqua pura risulta essere un pessimo conduttore di elettricità. Il motivo è che, statisticamente, solo due molecole d'acqua su 500 milioni sono dissociate secondo lo schema dell'equazione (61); le altre sono presenti in forma molecolare. Se però si scioglie in acqua, ad esempio, del cloruro di sodio, questo si dissocierà secondo l'equazione:

$$NaCl \rightleftharpoons Na^{+} + Cl^{-} \qquad (62)$$

con una marcata tendenza allo svolgimento della reazione verso destra. Moltissimi ioni si rendono in tal modo disponibili nel mezzo acquoso che può condurre benissimo l'elettricità.

Fig. 64

Movimento di una carica elettrica attraverso l'acqua.



Il cloruro di sodio e gli altri composti che si dissociano in acqua si chiamano elettroliti.

Un elettrolita si dice forte quanto più prontamente si dissocia (la produzione industriale di sodio, magnesio, alluminio e di molti altri metalli comporta il passaggio di corrente attraverso un composto ionico del metallo allo stato puro, oppure in soluzione. Il processo si chiama elettrolisi e si basa sul movimento in direzioni opposte degli ioni positivi e negativi dell'elettrolita dissociato).

È stato forse notato che si è evitato di chiamare formula molecolare quella relativa a un composto ionico. Il modello visto non suggerisce che le attrazioni ioniche producano molecole definite del tipo di quelle contenenti legami come quelli che abbiamo chiamato covalenti.

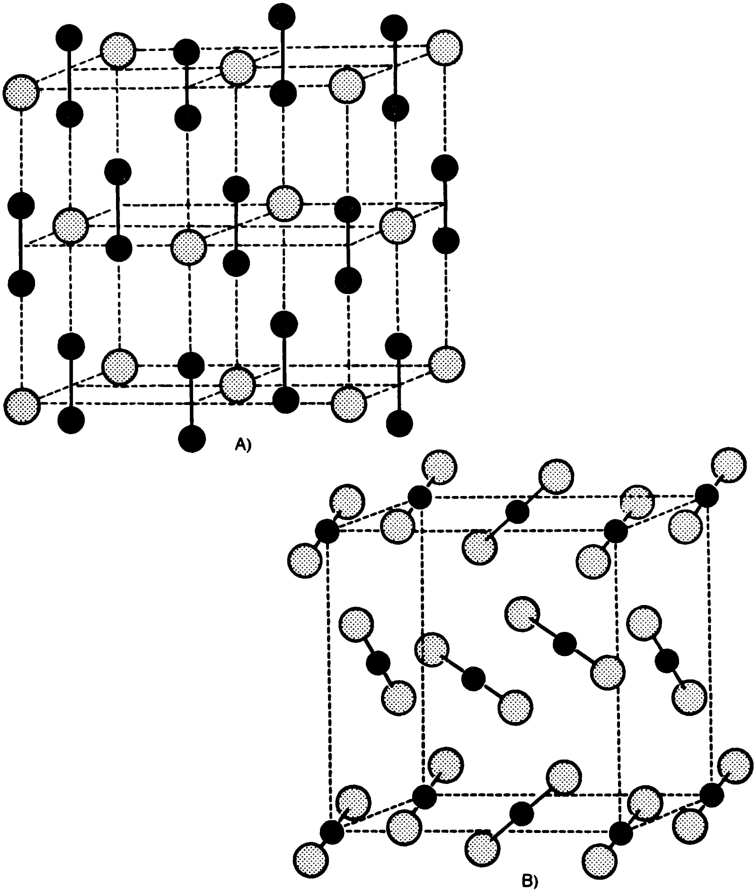
I cristalli dei solidi ionici sono tenuti insieme da interazioni elettrostatiche fra ciascuno ione e tutti gli altri, non da legami esclusivi fra particolari coppie di atomi. Ogni cristallo è piuttosto simile a un'enorme molecola, la cui formula può solo stabilire le proporzioni nelle quali sono contenuti i vari componenti ionici. Nei solidi covalenti ci si aspetta invece un diverso stato di cose, con forti legami fra gli atomi delle singole molecole; il modello visto non suggerisce però alcun tipo di forza che possa tenere unite le molecole così come le forze elettrostatiche uniscono gli ioni nei solidi ionici.

La conferma di queste previsioni è data dalle contrastanti proprietà del carburo di calcio, solido ionico, e dell'anidride carbonica solida (più nota come ghiaccio secco), composto covalente. La Fig. 65a mostra la disposizione degli ioni calcio (Ca^{2+}) e degli ioni carburo (C_2^{2-}) in un cristallo di carburo di calcio, mentre la Fig. 65b illustra la costituzione molecolare del ghiaccio secco. Gli ioni nel carburo di calcio sono ben allineati ed impaccati ed ognuno è circondato da sei ioni di carica opposta. Gli ioni aderiscono strettamente l'uno all'altro e il carburo di calcio resta solido fino alla temperatura di 447 °C. Le molecole di anidride carbonica, al contrario, possono essere facilmente separate e il solido gasifica spontaneamente a temperatura ambiente.

Il modello di legame covalente non prevede che tutti i composti di questo tipo abbiano molecole composte da pochi o pochissimi atomi. La Fig. 66 mostra infatti gli schemi di alcune molecole a legami covalenti di dimensioni indefinite. Le ultime due sono molecole di polimeri nelle quali è indefinita la sola lunghezza. Le prime quattro sono rappresentate in due dimensioni; ma, di nuovo, bisogna stare attenti a evitare errori di interpretazione dando peso alle caratteristiche non essenziali del modello. La molecola rappresentata in d) è

Fig. 65

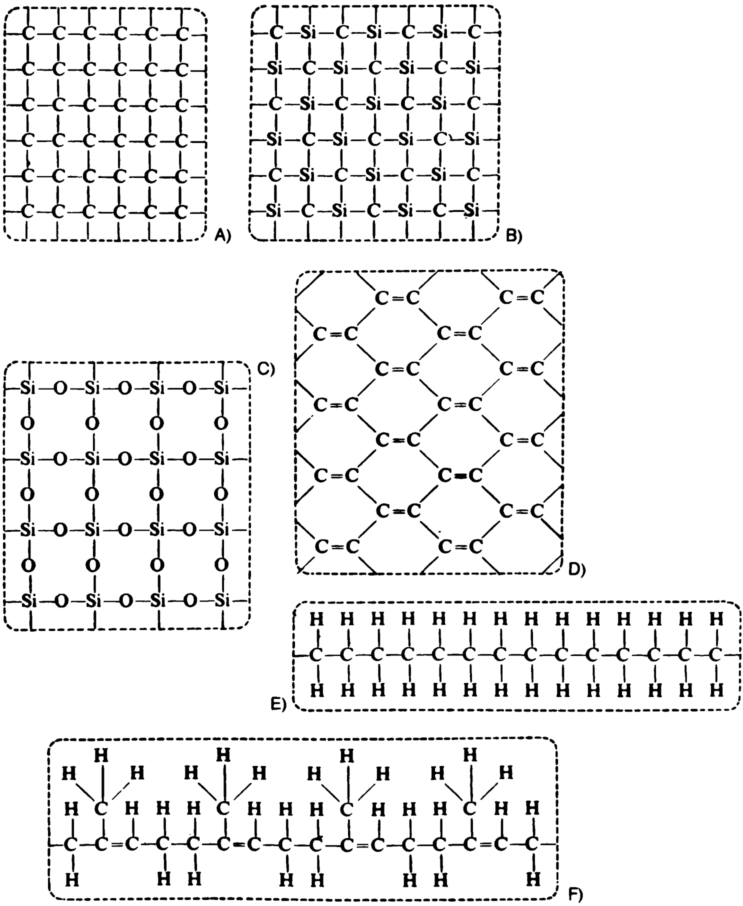
Struttura cristallina del carburo di calcio, in A), e dell'anidride carbonica (ghiaccio secco), in B).



in realtà l'unica bidimensionale delle quattro: si tratta della molecola gigante della grafite (la grafite viene talvolta usata come lubrificante e la sua azione in tal senso può essere spiegata dalle possibilità offerte dalle sue molecole piatte di scorrere l'una sull'altra). La Fig. 66a descrive in rappresentazione bidimensionale i legami di un altro stato del carbonio, il diamante. I quattro legami covalenti

Fig. 66

Alcune molecole covalenti di dimensioni indefinite.



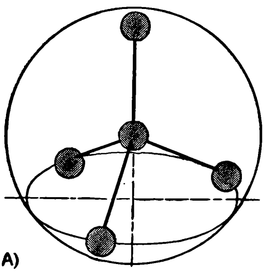
formati da ciascun atomo di carbonio sono disposti, secondo modelli più sofisticati, nel modo illustrato in Fig. 67a. La sistemazione tridimensionale degli atomi del diamante che risulta dalla moltiplicazione dello schema di Fig. 67a è illustrata in Fig. 67b. Il diamante è il più duro fra i materiali conosciuti e la sua durezza è attribuita alla sua struttura di molecola covalente gigante. (Per evitare equivoci, va segnalato che, ad esempio, una sola molecola di grafite, con 1 mm di lato, ha 4 milioni di esagoni, come quelli illustrati in Fig. 66d, nella sua profondità.) Il carborundum, rappresentato in Fig. 66b e il quarzo (Fig. 66c) sono anch'essi molto duri (le strutture del carborundum e del quarzo non sono che variazioni sulla base della struttura del diamante).

Paragonando i composti ionici e quelli covalenti è stata data importanza alle loro differenze nonostante che il modello suggerisca l'esistenza di sostanze con legami di tipo misto, né puramente covalenti né puramente ionici. Si confrontino a questo proposito i due schemi di legami dell'ossido di berillio mostrati in Fig. 68. L'ossido di berillio è un materiale che è stato studiato in funzione di un suo possibile impiego in campo nucleare. Nei suoi cristalli, ogni nocciolo di berillio è circondato da quattro noccioli di ossigeno e viceversa.

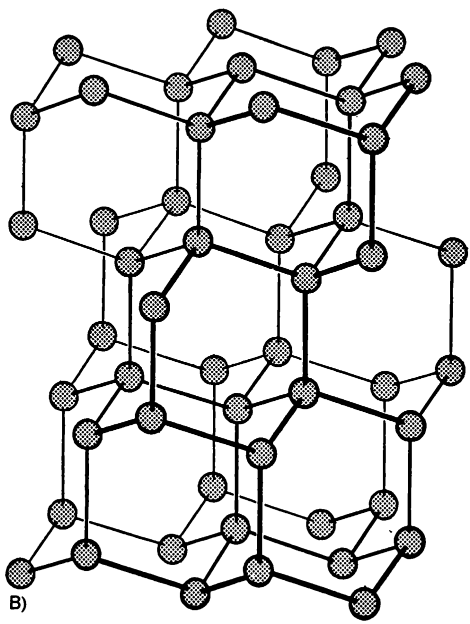
Nella Fig. 68, il materiale è visto prima come ionico e gli

Fig. 67

Unità fondamentale, in A), della struttura dei composti del carbonio a legame singolo; in B) struttura del diamante.



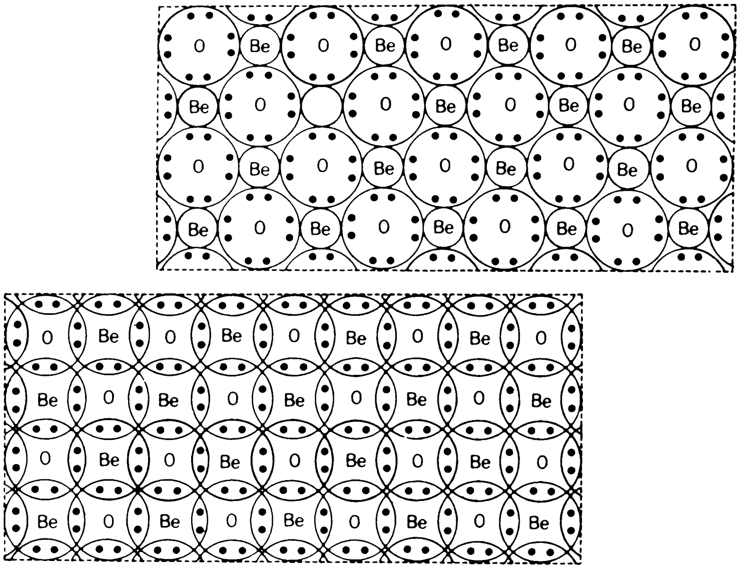
A)



B)

Fig. 68

Il legame atomico nell'ossido di berillio, visto, in alto, come composto ionico e, in basso, come composto covalente.



vengono attribuiti tutti gli elettroni di valenza dei noccioli di ossigeno. In basso, invece, i noccioli di berillio si dividono equamente gli elettroni di valenza, per cui il materiale è rappresentato come covalente. Nei legami covalenti, due noccioli hanno esattamente la stessa quota nella spartizione di un doppietto elettronico, mentre nei legami ionici esso viene spartito nel modo meno imparziale possibile, cioè uno dei noccioli se lo accaparra completamente. Fra questi due casi estremi c'è un'intera gamma di possibilità intermedie. Il semplice modello che è stato esaminato non potrà mai prevedere con che grado di imparzialità verrà spartito un doppietto elettronico fra due noccioli differenti.

7.4 Discussione del modello

Un modello come quello descritto non può nascere dal nulla. È il risultato di un enorme lavoro di coscienziosa sperimentazione e di brillanti idee da parte di innumerevoli scienziati. Fortunatamente si può ora imparare a usarlo senza bisogno di studiare la complessa storia del suo sviluppo. Ciò succede abbastanza di frequente, quando i modelli nati per la scienza si rendono disponibili alla tecnologia. Questo modello, come ogni altro, ha le sue debolezze e i suoi punti di forza. Le argomentazioni che riguardano il suo uso sono principalmente di tipo verbale e quindi soggette a molte insufficienze. Questo svantaggio è compensato dall'estrema semplicità del modello, per cui si può rimediare a molte manchevolezze elaborandolo con vari sistemi.

Il modello serve a suggerire più che a prevedere, e le deduzioni che se ne traggono richiedono un supporto sperimentale prima di poter essere considerate credibili. Come guida alla previsione il modello si mostra tuttavia molto utile. Come si è visto nella maggior parte degli esempi, il modello riesce a spiegare l'esistenza di molti composti noti, giustificando le proporzioni dei loro costituenti; spiega l'esistenza di ioni come quelli di Fig. 63 e suggerisce la possibilità dell'elettrolisi. Nel distinguere i composti ionici da quelli covalenti, il modello, mentre da un lato cerca di spiegare le differenze di comportamento fisico fra classi diverse di sostanze, dall'altro suggerisce anche che i legami possano essere di tipo intermedio fra i due estremi, ionico e covalente. Il modello suggerisce inoltre che alcuni composti covalenti possano avere molecole piccole mentre per altri le dimensioni possono essere indefinitamente grandi (per esempio le due molecole giganti costruite con atomi di carbonio).

A questo punto bisogna anche considerare i punti deboli del modello. Un difetto particolare è che esso non riesce a spiegare i composti del tipo dell'ossido di azoto NO (un gas fortemente reattivo), le cui molecole contengono un numero dispari di valenze elettroniche. Un difetto più generale è invece che esso suggerisce che gli elementi di un gruppo si comportino in maniera del tutto identica tra loro. Ognuno dei gruppi I, II e VII presenta una serie ben definita di caratteristiche chimico-fisiche; essi sono detti, rispettivamente, gruppo dei metalli alcalini, dei metalli alcalinoterrosi e degli alogeni. Negli altri gruppi le caratteristiche sono molto meno spiccate, in quanto le loro configurazioni elettroniche differiscono in maniera più sostanziale da quelle dei gas nobili. Ci si potrebbe per esempio aspettare, osservando la Fig. 52, che il comportamento del gallio, dell'indio e del tallio sia diverso da quello dell'alluminio, non foss'altro che per la struttura elettronica dei loro ioni Ga^{3+}, In^{3+}, Tl^{3+} che non assomiglia a quella dei gas nobili. In generale, però, la diversità di comportamento fra gli elementi di uno stesso gruppo è molto più marcata di quanto non ci si aspetti dall'analisi del modello semplice che si è visto.

A parte l'impossibilità di giustificare l'esistenza di alcuni composti e ioni conosciuti, il modello permette anche di ipotizzare l'esistenza di strutture atomiche, apparentemente accettabili, che però non corrispondono ad alcuna sostanza nota, ed inoltre per alcune molecole ammette più di una possibile disposizione degli elettroni di valenza. Il protossido di azoto N_2O permette di illustrare entrambe queste carenze in quanto tutti e tre questi schemi:

$$:\mathrm{N} \equiv \mathrm{N} - \underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{\mathrm{O}}}: \qquad \underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{\mathrm{N}}} = \mathrm{N} = \underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{\mathrm{O}}} \qquad \underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{\mathrm{N}}} = \mathrm{O} = \underset{\cdot\cdot}{\overset{\cdot\cdot}{\mathrm{N}}}$$

sono apparentemente accettabili. Il terzo, tuttavia, non corrisponde ad alcun composto noto, mentre i primi due contengono ciascuno una parte di verità, perché la molecola di protossido d'azoto può essere pensata come in continua trasformazione dall'una all'altra versione e viceversa (con questo ci si sta però già avvicinando a un modello più elaborato di legame, nel quale i doppietti elettronici di valenza si dicono decentrati).

Gli ioni carbonato e nitrato mostrati in Fig. 62 e la molecola di grafite in Fig. 66d sono ulteriori esempi di strutture molecolari per le quali il modello offre più alternative (in ciascuna di esse compaiono dei doppi legami che avrebbero potuto essere disposti in parecchi modi diversi). Tutte queste diverse strutture hanno la stessa validità e possono essere spiegate, nel modello più elaborato, ricorrendo agli elettroni decentrati.

Si potrebbero sollevare molte altre questioni, alle quali il modello non può dare risposta. Esse riguardano la forma delle molecole, la struttura dei cristalli, le forze che uniscono fra loro le molecole covalenti nei solidi come il ghiaccio secco o nei liquidi come l'acqua, e le forze che uniscono gli atomi, per esempio, in un metallo solido come l'alluminio. L'incapacità del modello di rispondere a queste domande non è però sufficiente a inficiarne la validità: significa soltanto che bisogna studiarne altri tipi, magari più elaborati.

Il modello, quindi, si rivela in prospettiva assai utile, sebbene, come parecchi modelli verbali, non possa risolvere molti quesiti con la precisione desiderata. Esso deve essere usato con cautela facendo attenzione alle sue limitazioni, ma, se arricchito con precisazioni ulteriori basate sull'osservazione, può migliorare le sue prestazioni.

È tipico dei modelli scientifici il non avere altro scopo, oltre a quello di essere, appunto, dei modelli, sempre disponibili per chiunque ne abbia bisogno.

Si svolgano ora gli esercizi 11, 12 di autovalutazione.

8 Modelli in scala

8.1 Un esempio introduttivo

La costruzione di una sala da concerti è molto costosa e il successo del progetto dipende fortemente dall'acustica dell'auditorio, la quale dipende a sua volta in modo complicato dalla forma e dalle dimensioni dell'auditorio e dal modo in cui l'energia delle onde sonore è assorbita durante la propagazione nell'aria e nelle riflessioni che esse subiscono da parte delle varie superfici che incontrano.

Un ascoltatore in ogni particolare posizione nella sala ode non soltanto i suoni che si propagano in linea retta verso di lui dall'orchestra, ma ode anche gli innumerevoli echi morenti che sono il risultato delle numerose riflessioni dei suoni stessi.

In tal modo una nota (staccata) appare spegnersi a poco a poco attraverso una successione di echi, un fenomeno che viene chiamato riverberazione. Il grado di riverberazione è un elemento importante per caratterizzare la bontà acustica di un auditorio. I requisiti di una sala da concerti sono per tale aspetto differenti da quelli di un teatro o di una cattedrale, tanto per fare un esempio.

Un ulteriore elemento importante è che il suono prodotto dall'orchestra si diffonda nell'auditorio il più uniformemente possibile. La complessità di tali problemi acustici sfida qualunque modello matematico, ma un modello in scala può essere utilizzato per accertare le previste qualità acustiche di un auditorio prima che venga assunto un impegno troppo grande verso un particolare progetto.

L'utilizzazione di un modello in scala inizia con la costruzione di un auditorio in scala ridotta, con tutte le lunghezze cioè che siano in rapporto $1/K$ con quelle dell'auditorio proposto. La necessità di disporre di orchestre e di ascoltatori pure in scala ridotta viene superata utilizzando dei piccoli altoparlanti in luogo dell'orchestra e dei piccoli microfoni, disposti nella sala, al posto degli ascoltatori. Il percorso di ogni eco che può essere udita in un dato punto nell'auditorio reale viene così automaticamente riprodotto nel modello. Rimane da assicurarsi che le varie proprietà di assorbimento sonoro delle superfici e dell'aria siano nel modello opportunamente combinate e che le riverberazioni nel modello servano effettivamente a stabilire le riverberazioni che ci si aspetta nel prototipo.

Non appena consideriamo l'aspetto della riverberazione nel modello ci appare la necessità di un ulteriore tipo di scala. I successivi echi che danno luogo alla riverberazione di una nota (staccata) sono diffusi nel tempo poiché i vari percorsi seguiti sono di differenti lunghezze mentre la velocità con cui viaggiano le onde sonore è la stessa per tutti i percorsi. L'intervallo di tempo tra gli arrivi di una qualunque coppia di echi è uguale alla differenza tra le lunghezze dei rispettivi percorsi divisa per la velocità del suono. Ora, nel modello tutte le lunghezze sono ridotte in rapporto con quelle del prototipo, ma la velocità del suono è la stessa nel modello e nel prototipo. L'intervallo di tempo tra gli arrivi dei due echi nel modello sarà quindi più piccolo di un fattore uguale al rapporto delle lunghezze ($1/K$) rispetto all'intervallo di tempo corrispondente nell'auditorio reale; le riverberazioni nel modello risulteranno quindi compresse nel tempo. L'importanza della riverberazione in un contesto musicale riguarda il modo in cui gli echi di una nota si spengono mentre si fondono con la nota successiva. Se si vuole realizzare l'effetto appropriato nel modello, dove i suoni si spengono più rapidamente che nel prototipo, ne segue che nel modello le note devono succedere l'una all'altra più rapidamente; in effetti, esse debbono succedersi nel modello K volte più rapidamente che nell'auditorio reale. Un secondo nel tempo del modello deve quindi rappresentare K secondi nel tempo del prototipo e la scala $1/K$, scelta per le lunghezze, deve essere adottata anche per il tempo. La via alternativa, consistente nel fare in modo da avere una velocità del suono ridotta nel modello, non è praticabile.

La procedura di prova consiste quindi di parecchie operazioni. La prima è costituita dalla registrazione di un pezzo musicale in assenza di riverberazione. Questa viene effettuata in una sala appositamente progettata chiamata sala anecoica, le cui dimensioni e le cui rifiniture sono combinate in modo da eliminare tutti gli echi. Il secondo passo consiste nel copiare la prima registrazione in modo da produrne una versione K volte più veloce. Successivamente attraverso l'altoparlante nel modello vengono registrati i suoni raccolti dai vari microfoni nell'auditorio modello.

Finalmente, queste ultime registrazioni vengono riprodotte, a una velocità uguale a quella dell'esecuzione originaria dell'orchestra. Ammesso che le proprietà di assorbimento del modello siano state convenientemente congegnate, queste ultime registrazioni riveleranno le qualità acustiche in quelle posizioni che nella sala da concerto reale corrispondono ai luoghi in cui sono stati posti i microfoni nel modello.

Per ottenere un corretto assorbimento sonoro nel modello, si richiede di prestare attenzione a due fenomeni essenzialmente diversi. Il primo consiste nell'attenuazione del suono durante la sua propagazione nell'aria, mentre il secondo fenomeno riguarda la riduzione dell'energia delle onde sonore che avviene quando queste sono riflesse dalle superfici.

L'assorbimento di energia delle onde sonore da parte dell'aria viene stimato mediante la frazione di energia che un'onda perde nell'attraversamento di una distanza unitaria. Se onde corrispondenti devono perdere la stessa frazione di energia seguendo percorsi corrispondenti nel modello e nel prototipo, allora, poiché il percorso nel modello è più breve di un fattore $1/K$, la frazione di energia assorbita per unità di percorso deve essere maggiore di un fattore K nel modello. Ciò è possibile in seguito a una fortunata coincidenza. Come si è visto, la scala temporale del modello è compressa, così che le frequenze dei suoni nel modello sono K volte più grandi che nel prototipo. Accade che i suoni aventi frequenze più elevate sono assorbiti nell'aria più fortemente dei suoni aventi le ordinarie frequenze musicali. In verità l'aumento di frequenza di un fattore K provoca un aumento di assorbimento di un fattore maggiore di K. Tuttavia questo aumento non proporzionato può essere compensato riducendo l'umidità dell'aria, poiché la capacità di assorbimento sonoro dell'aria umida decresce al diminuire dell'umidità. (Poiché tale processo di compensazione non è del tutto perfetto c'è una restrizione pratica sulla scala dei modelli acustici: $1/K$ non può essere reso più piccolo di circa 1/12, cosicché non possono essere costruiti dei modelli acustici molto piccoli.)

L'assorbimento del suono da parte di una superficie dipende sia dal materiale, sia dalla natura della superficie, sia dalla frequenza del suono. In generale, quindi, poiché le frequenze nel modello differiscono da quelle nel prototipo, i materiali usati nel modello devono differire da quelli del prototipo. La scelta dei materiali appropriati è una questione da risolversi per via sperimentale. Gli esperimenti pertinenti a tale scopo comportano l'utilizzo di un'altra sala speciale e di un modello acustico di essa nella scala prescelta, $1/K$. Questa sala è progettata, a differenza della sala anecoica, in modo da fornire una forte riverberazione. Un'area sulla superficie delle pareti della sala riverberante viene ricoperta con il materiale che si vuole modellare, mentre l'area corrispondente nella sala modello viene ricoperta con un materiale che, si pensa, possa essere adatto per l'utilizzo nel modello. Le registrazioni effettuate nella sala riverberante sono confrontate con quelle prodotte con i metodi dei modelli acustici utilizzando il modello della sala. In questo modo è possibile provare i vari materiali utilizzabili nel modello e scegliere quelli soddisfacenti. Così, per esempio, si è trovato che certi velluti sono adatti per imitare i tappeti.

In un reale auditorio le poltrone e l'insieme degli ascoltatori costituiscono una fonte importante di assorbimento sonoro. Di nuovo, una sala riverberante e il suo modello acustico possono essere utilizzati per la ricerca dei modelli opportuni. Si è scoperto che delle figure ritagliate da un blocco di poliuretano espanso e provviste di teste realizzate con legno di pino costituiscono dei modelli soddisfacenti degli ascoltatori. La superficie irregolare della schiuma plastica ritagliata assorbe il suono di alta frequenza nel modello in un modo che corrisponde bene agli effetti degli abiti alle normali frequenze musicali.

8.2 Considerazioni generali sui modelli in scala

L'esempio dei modelli acustici ci permette di fare alcune importanti considerazioni sui modelli in scala in generale. La prima considerazione riguarda il tipo di problema per la cui soluzione è probabile che i modelli in scala siano d'aiuto. Nel campo dell'acustica, i vari fenomeni rilevanti singolarmente presi sono ormai chiariti: la generazione, la propagazione, la riflessione, l'assorbimento e la ricezione delle onde sonore. Risulta così abbastanza semplice elencare gli elementi importanti del modello (a tale scopo può essere utile fare riferimento alla Fig. 1). Essi sono: la forma dell'auditorio, la posizione in cui hanno origine i suoni, le posizioni dove ha luogo la ricezione, la disposizione e le proprietà acustiche delle superfici riflettenti, il potere assorbente dell'aria, e le frequenze dei suoni stessi.

È risolta in tal modo la questione relativa a cosa contribuisce a realizzare le caratteristiche di qualità d'ascolto. La questione realmente difficile e complicata è: «Come?», oppure: «Quali sono le interazioni veramente importanti?».

Tuttavia, il progettista ha interesse per il risultato di queste interazioni (il funzionamento risultante) e se questo può essere ottenuto senza una piena comprensione delle interazioni, egli sarà comunque soddisfatto. Il concetto di fondo è che, qualunque siano le interazioni nel prototipo, il comportamento fisico del modello le riprodurrà automaticamente, giacché lo stesso tipo di fenomeni accadrà tanto nel modello che nel prototipo. È sufficiente conoscere l'essenza del problema, non è necessario sapere esattamente perché o come. Naturalmente, è poco probabile che si sia in grado di congetturare correttamente ciò che importa, finché non si abbia almeno una vaga idea del perché o del come, ma non è tuttavia necessaria una comprensione dettagliata di tali questioni.

Un tipo di problema in cui un modello in scala può essere di aiuto è dunque quello in cui si individuano abbastanza facilmente gli elementi essenziali per il comportamento che ci interessa, mentre le interazioni tra tali elementi sono estremamente complicate. Parecchi problemi di questo tipo si incontrano in quei campi dell'ingegneria che hanno a che fare con i fluidi, cioè con i liquidi e con i gas. Di conseguenza i modelli in scala sono spesso utilizzati negli studi per il progetto di pompe e turbine, navi e aeroplani, schemi di protezioni portuali e costiere, e in problemi riguardanti il movimento della sabbia nei fiumi e negli estuari e la dissipazione del calore inutilizzato dalle centrali di potenza.

Una seconda questione riguarda la possibilità che grandezze diverse dalla lunghezza debbano essere ridotte (nell'esempio, bisognava utilizzare nel modello una scala temporale ridotta), mentre la scelta delle scale per le diverse grandezze non è sempre libera.

Una volta scelta la scala delle lunghezze, nel modello acustico, risultavano abbastanza definite le scale del tempo e del potere assorbente dell'aria. La relazione tra questi fattori di scala veniva dedotta dai dettagli del problema, ma esiste tuttavia anche un criterio generale.

8.2.1 Unità di misura. Tutti si è soliti valutare le distanze in centimetri, metri, kilometri. A una domanda come: «Quanto dista dal bar la fermata dell'autobus?» si aspetta una risposta che specifichi un certo numero di una di queste usuali unità di lunghezza. Tale numero è chiamato la misura della lunghezza in questione,

misura

nelle assegnate unità. Non c'è niente di assoluto nelle unità che utilizziamo per misurare le cose; tali unità sono definite convenzionalmente.

Il metro (attualmente definito in termini della lunghezza d'onda della luce emessa da una particolare sorgente) è oggi l'unità fondamentale di lunghezza. Esso è una delle unità fondamentali nel Sistema Internazionale di unità di misura (SI). Ci sono sei altre unità fondamentali SI, delle quali quelle con cui avremo soprattutto a che fare in questa sede sono il kilogrammo e il secondo, rispettivamente per le

unità fondamentali e derivate

misure di massa e di tempo. Gli argomenti che sono oggetto della meccanica non richiedono altre unità fondamentali oltre a quelle di massa, lunghezza e tempo. Tutte le altre unità necessarie, per esempio, nelle misure di aree, volumi, velocità, forze, ecc., possono essere derivate da queste unità fondamentali; e pertanto esse sono chiamate unità derivate.

Un concetto utile quando si tratta con le unità derivate è quello di dimensioni di una grandezza fisica. Nel sistema SI, le unità fondamentali in meccanica sono quelle di massa, lunghezza e tempo. Esse sono completamente indipendenti: non c'è modo di esprimere una lunghezza in termini di unità di massa o di tempo. Noi diciamo che le masse, le lunghezze e i tempi hanno dimensioni differenti. Tale uso della parola 'dimensione' non ha niente a che fare con

dimensioni

il concetto di estensione, piuttosto esso è in linea con espressioni come «Egli dovrebbe aggiungere una nuova dimensione al suo modo di pensare». In verità, volendo estendere l'interesse al campo della termodinamica, bisognerebbe aggiungere una nuova dimensione. Aggiungendo l'unità fondamentale di temperatura (il grado Kelvin, o semplicemente kelvin, nel Sistema Internazionale) introduciamo una dimensione indipendente per la temperatura.

Non è essenziale che le unità e le dimensioni fondamentali si riferiscano sempre alle stesse grandezze fisiche. Per esempio, il Sistema Internazionale viene esteso ai fenomeni elettromagnetici introducendo l'unità fondamentale di corrente elettrica (ampere); ma spesso si preferisce la carica elettrica alla corrente elettrica come grandezza fondamentale.

Possiamo rappresentare la dimensione della massa con $[M]$, quella della lunghezza con $[L]$ e quella del tempo con $[T]$. In questa notazione M, per esempio, non sta necessariamente a indicare una particolare massa. Tutte le masse hanno la dimensione della massa. Così quando un simbolo indicante una grandezza fisica è racchiuso fra parentesi quadre, il simbolo composto risultante sta ad indicare le dimensioni della grandezza specificata. Internamente alle parentesi quadre, quindi, ciascuna massa è altrettanto buona di un'altra, e non ha senso il distinguerle.

Risulta ora facile esprimere le dimensioni di grandezze fisiche diverse da masse, lunghezze e tempi in termini delle dimensioni fondamentali, $[M]$, $[L]$ e $[T]$. Ad esempio, un rettangolo i cui lati hanno lunghezza rispettivamente l_1 e l_2, ha un'area A data da:

$$A = l_1 l_2$$

e ciascun membro di tale equazione deve avere le dimensioni di un'area. Così possiamo scrivere:

$$[A] = [l_1 l_2] = [LL] = [L^2]$$

e dire che le dimensioni dell'area sono $[L^2]$. Indicando con L sia l_1 che l_2 abbiamo utilizzato il fatto che, internamente alle parentesi quadre, una lunghezza vale quanto un'altra.

Come altro esempio consideriamo la densità. La densità è definita come la massa per unità di volume. Un volume, essendo calcolato come il prodotto di tre lunghezze, ha dimensioni $[L^3]$. Quindi, se ρ è una densità:

$$[\rho] = \frac{[M]}{[L^3]} = [M/L^3] = [ML^{-3}].$$

Le dimensioni di ogni grandezza fisica incontrata in meccanica possono essere espresse da $[M^p L^q T^r]$ con un'opportuna scelta delle potenze p, q, r. I valori appropriati possono essere ricavati dalla definizione della grandezza stessa (come si è appena visto nei casi dell'area, del volume e della densità). Come ulteriore esempio, la seconda legge del moto di Newton definisce la forza in termini del prodotto tra massa M e accelerazione a. La legge si scrive:

$$F = MA,$$

quindi:

$$[F] = [M]\,[a] = [M]\,[L/T^2] = [MLT^{-2}].$$

(Abbiamo qui posto $[L/T^2]$ come dimensioni dell'accelerazione, in anticipo sul seguente esercizio.)

Esercizio. Mediante la definizione di velocità uniforme, trovare le dimensioni della velocità, v, in termini di $[M]$, $[L]$, $[T]$. Analogamente, mediante la definizione di accelerazione uniforme, a, trovare le dimensioni dell'accelerazione.

Risposta. La velocità uniforme di un corpo è data dalla distanza percorsa divisa per il tempo impiegato a percorrerla. La distanza ha dimensione $[L]$ e il tempo ha dimensione $[T]$. Le dimensioni della velocità sono quindi:

$$[v] = [L]/[T] = [L/T] = [LT^{-1}].$$

Se un corpo accelera uniformemente partendo da fermo, la sua accelerazione si ricava dividendo la sua velocità, in un qualunque istante, per il tempo trascorso dall'istante iniziale; quindi:

$$[a] = \frac{[v]}{[T]} = [LT^{-1}/T] = [LT^{-2}].$$

In Tab. VI sono elencate alcune grandezze fisiche ricorrenti nella meccanica dei fluidi. Le loro dimensioni sono indicate in termini di $[M]$, $[L]$ e $[T]$ e, inoltre, sono indicate le loro unità di misura derivate SI. È possibile vedere che tali

Tab. VI - Dimensioni di alcune grandezze meccaniche

grandezza fisica	simbolo	dimensioni	unità SI	note
massa	M	$[M]$	kg	dimensioni e unità fondamentali
lunghezza	L	$[L]$	m	
tempo	T	$[T]$	s	
angolo	α	$[M^0L^0T^0]$	rad	grandezza adimensionale
area	A	$[L^2]$	m^2	dimensioni e unità derivate
volume	V	$[L^3]$	m^3	
velocità	v	$[LT^{-1}]$	$m\ s^{-1}$	
accelerazione	a	$[LT^{-2}]$	$m\ s^{-2}$	
densità	ρ	$[ML^{-3}]$	$kg\ m^{-3}$	
forza	F	$[MLT^{-2}]$	$kg\ m\ s^{-2}$	
viscosità[1]	μ	$[ML^{-1}\ T^{-1}]$	$kg\ m^{-1}\ s^{-1}$	
modulo di contrazione[2]	k	$[ML^{-1}\ T^{-2}]$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	
tensione superficiale[3]	σ	$[MT^{-2}]$	$kg\ s^{-2}$	

[1] Per viscosità s'intende quella proprietà di un fluido che caratterizza la sua resistenza allo scorrimento (ad esempio, il miele è un liquido molto viscoso). [2] Il modulo di contrazione di un fluido caratterizza la sua resistenza alla compressione. In generale i liquidi hanno moduli di contrazione molto maggiori che i gas. [3] La pressione internamente ad una bolla è leggermente maggiore che esternamente. Tale pressione interna è bilanciata da una tensione presente nella sottile lamina liquida che costituisce la bolla. Su ogni superficie di un liquido si esercita una tensione superficiale di questo tipo — e questo è il motivo per cui le gocce di un liquido su una superficie solida non si distendono in strati indefinitamente sottili.

unità sono derivate dalle espressioni dimensionali semplicemente rimpiazzando $[M]$ con kg, $[L]$ con m, $[T]$ con s. Un sistema di unità ricavate in questo modo da un insieme di unità fondamentali è detto sistema coerente. In un sistema siffatto non ci sono fattori di conversione arbitrari (come 5280 piedi = 1 miglio). Per convenienza, a certe unità derivate si può assegnare un nome (ad esempio, l'unità SI della forza è chiamata newton), ma ciò non cambia il loro stato di unità derivate.

Non c'è alcun motivo particolare nella scelta di $[M]$, $[L]$ e $[T]$ come dimensioni fondamentali. Taluni sistemi coerenti di unità di misura utilizzano come dimensioni fondamentali le dimensioni di forza, lunghezza e tempo: $[F]$, $[L]$ e $[T]$. In questi sistemi le dimensioni della massa, determinate in base alla seconda legge del moto di Newton, sono:

$$[M] = [FL^{-1}T^{2}].$$

(Nella statica il tempo non interviene; tutte le grandezze importanti, in statica, hanno dimensioni che sono esprimibili unicamente in termini di $[F]$ e $[L]$). Ciò non richiede un'unità fondamentale di forza che rimpiazzi l'unità fondamentale di massa. Come notato precedentemente, l'unità fondamentale della corrente elettrica è l'ampere. Cionondimeno, le dimensioni della corrente elettrica sono di solito indicate con $[QT^{-1}]$ dove $[Q]$, la dimensione della carica elettrica, è considerata dimensione fondamentale. Le dimensioni fondamentali non sono necessariamente quelle delle unità fondamentali.

Parlando dei modelli in meccanica dei fluidi, è utile considerare un sistema dimensionale basato sulle dimensioni della lunghezza, della velocità e della densità. Le dimensioni fondamentali sono cioè $[L]$, $[v]$ e $[\rho]$. Massa e tempo hanno dimensioni derivate: $[M] = [\rho L^{3}]$ e $[T] = [Lv^{-1}]$. Questa scelta scambia le dimensioni di Tab. VI con quelle di Tab. VII (le unità di misura sono ancora le unità SI; si possono ricavare dalle relazioni dimensionali di Tab. VII sostituendo $[L]$ con m, $[v]$ con m s^{-1}, $[\rho]$ con kg m^{-3}).

Tab. VII - Dimensioni derivate da quelle di lunghezza, velocità e densità

grandezza fisica	simbolo	dimensioni
lunghezza	L	$[L]$
velocità	v	$[v]$
densità	ρ	$[\rho]$
angolo	α	$[L^{0}v^{0}\rho^{0}]$
area	A	$[L^{2}]$
volume	V	$[L^{3}]$
massa	M	$[\rho L^{3}]$
tempo	T	$[Lv^{-1}]$
accelerazione	a	$[v^{2}L^{-1}]$
forza	F	$[\rho v^{2}L^{2}]$
viscosità	μ	$[\rho vL]$
modulo di contrazione	k	$[\rho v^{2}]$
tensione superficiale	σ	$[\rho v^{2}L]$

8.2.2 Descrizioni adimensionali. Come si è notato all'inizio del paragrafo precedente, il valore di una grandezza fisica viene definito dando un numero (la misura della grandezza) e un'unità di misura. Ad esempio potremmo esprimere la larghezza di questa pagina dicendo che è di 10,5 cm, oppure di 4,1 pollici: la misura cambia quando cambia l'unità di misura. Al contrario, il rapporto tra l'altezza della pagina e la sua larghezza non dipende dalle unità con cui l'altezza e la larghezza sono state misurate, ammesso che entrambe le misure siano state effettuate utilizzando lo stesso sistema di unità. Si tratta di un rapporto di una lunghezza con un'altra lunghezza; le sue dimensioni sono quindi $[L]/[L] = [LL^{-1}] = [L^0]$: diciamo perciò che esso è adimensionale. Gli angoli sono pure adimensionali, come si può vedere dalle Tabb. VI, VII.

È impensabile che il comportamento dei fenomeni fisici dipenda dalla nostra arbitraria scelta delle unità di misura. Ci si deve aspettare, quindi, che le relazioni fisiche tra le varie grandezze che compaiono nella descrizione di un fenomeno siano esprimibili in maniera adimensionale. Esaminiamo un problema caratteristico della meccanica dei fluidi e vediamo come esso possa essere descritto in maniera adimensionale.

Consideriamo pertanto un'imbarcazione che navighi su un oceano infinitamente esteso e infinitamente profondo (tali ipotesi assurde sono un modo indiretto di dire che per i nostri scopi noi stiamo considerando un battello che sia sufficientemente lontano da ogni approdo e che si trovi in acque sufficientemente profonde, così che la sua distanza dalla terraferma e la profondità delle acque siano irrilevanti). Possiamo descrivere la forma del battello, la profondità del pescaggio, l'altezza dell'onda di prua, l'altezza fino a cui arrivano le incrostazioni di cirripedi sullo scafo, in pratica tutte le lunghezze che interessano (diciamo L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, e così via) senza dare le loro misure in un particolare sistema di unità, ma assegnando i rapporti in cui tali lunghezze stanno rispetto alla lunghezza del battello. (La scelta della lunghezza del battello è stata arbitraria — si sarebbe potuto ugualmente bene utilizzare la larghezza.) Trattandosi di rapporti tra lunghezze, abbiamo così grandezze adimensionali. La lunghezza del battello sarà pure espressa mediante il rapporto 1 che essa forma con sé stessa. È tuttavia opportuno segnarsi anche la lunghezza effettiva, L_0, del battello in qualche sistema di unità di misura, per poter facilmente ricavare eventuali ulteriori rapporti di lunghezza. Si può passare quindi a trattare le velocità.

Le velocità (diciamo v_1, v_2, v_3, ecc.) che possono interessare includono certamente la velocità di avanzamento del battello rispetto all'acqua lontana in quiete e possono comprendere, ad esempio, le velocità delle onde create dal passaggio dell'imbarcazione. Di nuovo possiamo scegliere una velocità di riferimento (la velocità di avanzamento del battello è una scelta ovvia) e descrivere tutte le altre velocità per mezzo dei rapporti che esse formano con questa. La velocità di riferimento è ancora caratterizzata dal rapporto 1 che essa forma con sé stessa. Possiamo annotare v_0 e passare quindi alle densità.

Tab. VIII - Descrizione dimensionale di un problema

grandezze fisiche	variabili che intervengono nella descrizione					
lunghezze	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	....
velocità	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	....
densità	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	....
forze	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	....
accelerazioni	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	....
viscosità	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	....
tempi	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	....

Per trattare le densità (diciamo ρ_1, ρ_2, ρ_3, ecc.) di nuovo ne scegliamo una come riferimento, descriviamo tutte le altre mediante i rapporti che formano con essa, e annotiamo il valore, ρ_0, di tale densità di riferimento nel sistema di unità di misura prescelto.

Chiaramente possiamo continuare tale processo per ogni specie di grandezza, ed esprimere, ad esempio, tutte le forze mediante i rapporti che formano con una prescelta forza di riferimento, tutte le accelerazioni mediante i loro rapporti rispetto a un'accelerazione di riferimento, e così via. In tal modo possiamo passare da una descrizione della situazione nella forma rappresentata in Tab. VIII a quella rappresentata in Tab. IX, che ne rappresenta un'evoluzione.

Questa descrizione consiste in insiemi di rapporti di lunghezze, rapporti di velocità, rapporti di densità, rapporti di forze e così via (tutti adimensionali) e in una lista di grandezze di riferimento, L_0, v_0, ρ_0, F_0, ecc. I riquadri che compaiono nelle Tabb. IX e X racchiudono le grandezze che necessitano di una descrizione dimensionale.

Si può procedere oltre. Dall'esame della Tab. VII si vede che le dimensioni della forza sono $[\rho\, v^2\, L^2]$, il che implica che moltiplicando tra loro la densità di riferimento, il quadrato della velocità di riferimento e il quadrato della lunghezza di riferimento si ottiene una grandezza, $\rho_0 v_0^2 L_0^2$, avente le

Tab. IX - Descrizione mediante rapporti adimensionali

grandezze fisiche	grandezze di riferimento	variabili che intervengono nella descrizione				
lunghezze	$L_1 \rightarrow \lvert L_0 \rvert$	1	L_2/L_1	L_3/L_1	L_4/L_1	L_5/L_1
velocità	$v_1 \rightarrow \lvert v_0 \rvert$	1	v_2/v_1	v_3/v_1	v_4/v_1	v_5/v_1
densità	$\rho_1 \rightarrow \lvert \rho_0 \rvert$	1	ρ_2/ρ_1	ρ_3/ρ_1	ρ_4/ρ_1	ρ_5/ρ_1
forze	$F_1 \rightarrow \lvert F_0 \rvert$	1	F_2/F_1	F_3/F_1	F_4/F_1	F_5/F_1
accelerazioni	$a_1 \rightarrow \lvert a_0 \rvert$	1	a_2/a_1	a_3/a_1	a_4/a_1	a_5/a_1
viscosità	$\mu_1 \rightarrow \lvert \mu_0 \rvert$	1	μ_2/μ_1	μ_3/μ_1	μ_4/μ_1	μ_5/μ_1
tempi	$T_1 \rightarrow \lvert T_0 \rvert$	1	T_2/T_1	T_3/T_1	T_4/T_1	T_5/T_1

Tab. X - Descrizione riferita a un sistema di unità di misura

grandezze fisiche	grandezze di riferimento	variabili che intervengono nella descrizione				
lunghezze	$\lvert L_0 \rvert$	1	L_2/L_1	L_3/L_1	L_4/L_1	L_5/L_1
velocità	$\lvert v_0 \rvert$	1	v_2/v_1	v_3/v_1	v_4/v_1	v_5/v_1
densità	$\lvert \rho_0 \rvert$	1	ρ_2/ρ_1	ρ_3/ρ_1	ρ_4/ρ_1	ρ_5/ρ_1
forze	$F_0/(\rho_0 L_0^2 v_0^2)$	1	F_2/F_1	F_3/F_1	F_4/F_1	F_5/F_1
accelerazioni	$a_0 L_0/v_0^2$	1	a_2/a_1	a_3/a_1	a_4/a_1	a_5/a_1
viscosità	$\mu_0/(\rho_0 L_0 v_0)$	1	μ_2/μ_1	μ_3/μ_1	μ_4/μ_1	μ_5/μ_1
tempi	$T_0 v_0/L_0$	1	T_2/T_1	T_3/T_1	T_4/T_1	T_5/T_1

dimensioni di una forza. Possiamo quindi caratterizzare la precedente forza di riferimento, F_0, mediante il rapporto che forma con questa grandezza, vale a dire con $F_0/(\rho_0 v_0^2 L_0^2)$, che è adimensionale.

Esercizio. Se a_0 è l'accelerazione di riferimento e L_0, v_0, ρ_0 sono rispettivamente la lunghezza di riferimento, la velocità di riferimento e la densità di riferimento, quale potrebbe essere un'opportuna grandezza adimensionale per caratterizzare a_0?

Risposta. In Tab. VII si legge che le dimensioni dell'accelerazione sono $[v^2L^{-1}]$. Quindi v_0^2/L_0 ha le dimensioni dell'accelerazione e $a_0/(v_0^2/L_0)$, cioè a_0L_0/v_0^2, è una grandezza adimensionale adatta per caratterizzare a_0.

Mediante questo procedimento, si può arrivare alla descrizione del fenomeno mostrata in Tab. X, in cui soltanto tre grandezze, L_0, v_0 e ρ_0, mantengono un carattere dimensionale.

L'assetto della Tab. VIII non comporta che nel caso del battello, da cui siamo partiti, noi avremo effettivamente a che fare con parecchie differenti viscosità o densità, tanto per fare un esempio. Semplicemente si è inteso fornire una descrizione generale del procedimento che si può sempre seguire. Ci potrebbe accadere di incontrare un problema in cui difficilmente la densità sia una variabile importante. In tal caso, potremmo forse utilizzare $[L]$, $[v]$ e $[F]$ per ricomporre la Tab. VII.

C'è sempre un insieme di grandezze che possono essere considerate per costituire un insieme di dimensioni fondamentali e per essere utilizzate come si è fatto con $[L]$, $[v]$, $[\rho]$ nella precedente esposizione. Nella statica, ad esemio, come si è già ricordato, le grandezze adatte sono $[L]$ e $[F]$, e non è necessaria, né può essere trovata, alcun'altra dimensione fondamentale indipendente.

8.2.3 Teorema di Buckingham. Tutte le grandezze fisiche relative alla navigazione di un battello possono essere descritte come indicato in Tab. X. Ma il vero interesse ad affrontare tale argomento sta nelle relazioni tra queste grandezze. Tali relazioni non possono dipendere in maniera essenziale dalla scelta di un sistema di unità di misura: la decisione di misurare le lunghezze in metri piuttosto che in cubiti non dovrebbe influenzare il modo in cui un battello si muove attraverso l'acqua. Perciò ogni espressione che esprime una relazione fisica non deve cambiare quando variano le unità di misura. I rapporti adimensionali che appaiono in Tab. X non cambiano se cambiano le unità, ma le misure di L_0, v_0 e ρ_0 sì. Inoltre, non è possibile in alcun modo mettere insieme L_0, v_0 e ρ_0 per produrre un rapporto adimensionale: le loro dimensioni sono indipendenti. Ne segue che le relazioni che stiamo cercando non riguardano L_0, v_0 e ρ_0, eccetto che nel caso in cui queste grandezze compaiano in combinazioni adimensionali con altre variabili. Quindi tutto ciò che può essere detto su tali relazioni, per il battello considerato o per ogni altro fenomeno fisico, può essere detto completamente nel linguaggio dei rapporti adimensionali.

L'uso dei rapporti adimensionali nella descrizione di un problema presenta parecchi vantaggi. Il più evidente è l'esplicita indipendenza dai sistemi di unità di misura. Un altro è la riduzione nel numero delle variabili che appaiono nel problema. Tornando alle tabelle precedenti, si vede che le variabili che occupano una colonna completa in Tab. IX sono state rimpiazzate dall'unità in Tab. X e pertanto non sono più variabili. Nondimeno, in Tab. X sono comparse nuove variabili nella colonna precedente, ma L_0, v_0 e

ρ_0, come si è appena visto, possono essere accantonate. Il numero totale delle variabili importanti nella descrizione finale è quindi, in questo caso, inferiore di tre rispetto al numero delle variabili nella prima descrizione; e tre è, naturalmente, il numero delle dimensioni indipendenti nella descrizione originaria del problema.

Le conclusioni tratte in questo capitolo costituiscono il teorema di Buckingham dell'analisi dimensionale, che può essere enunciato nel modo seguente. Tutte le relazioni tra le variabili che descrivono un fenomeno fisico possono essere espresse in termini di prodotti o rapporti adimensionali. Il numero di tali grandezze adimensionali è uguale al numero totale delle variabili che compaiono nel problema, meno il numero delle dimensioni indipendenti assunte come essenziali.

8.2.4 Similitudine. Avendo presente il teorema di Buckingham, si può facilmente immaginare una situazione in cui, tanto per fare un esempio, ci sono due battelli differenti aventi lunghezze differenti che navigano con velocità diverse attraverso oceani diversi, per i quali tuttavia i rapporti adimensionali, ordinati come in Tab. X, coincidono. Ciò suggerisce che possano essere effettuate delle misure per uno di tali battelli in modo da prevedere il comportamento dell'altro — e questa è l'idea fondamentale dei modelli in scala. Quando si tenta di ottenere una tale corrispondenza tra un modello e il suo prototipo, si dice che si sta cercando di stabilire una similitudine tra di essi.

In generale, non si può esercitare un controllo diretto su tutte le grandezze adimensionali che caratterizzano un modello: lo scopo reale per cui si è costruito il modello è infatti quello di utilizzarlo per trovare i valori di alcune di tali grandezze.

Nell'affrontare qualunque problema, tuttavia, siamo a conoscenza della differenza esistente tra due specie di variabili: le variabili indipendenti e le variabili dipendenti. Le prime sono quelle che risultano fissate nell'assegnazione del problema (sono le proprietà elementari rilevanti nella terminologia di Fig. 1); le variabili dipendenti sono quelle che si considerano conseguenze delle variabili indipendenti (esse rappresentano le proprietà, ovvero il comportamento, risultanti). Si tratta quindi di procedere, come nell'esempio dei modelli acustici, stabilendo una similitudine tra le variabili indipendenti; le altre variabil riguardano sé stesse e vanno considerate a parte rispetto a tutte le relazioni che il modello può permetterci di chiarire.

È importante comprendere che il teorema di Buckingham non ci dice che è possibile stabilire una corrispondenza tra tutte le variabili adimensionali rilevanti nel modello e nel prototipo. Semplicemente, esso suggerisce che si può tentare. Esso non riguarda affatto la fisica, quanto piuttosto la matematica che può essere applicata alla fisica.

8.2.5 Alcuni tipi di similitudine. Se si è riusciti a far corrispondere i valori di tutti i rapporti tra lunghezze (le grandezze adimensionali della prima riga di Tab. X) per un modello con quelli del suo prototipo, si

similitudine geometrica

dice che si è realizzata una similitudine geometrica. Oggetti simili geometricamente hanno la forma in comune; essi posseggono le stesse proporzioni e gli angoli tra le parti corrispondenti sono identici. La scala del modello (che dovremmo più propriamente chiamare la scala di lunghezza) è data dal rapporto tra la lunghezza di riferimento, $L_{0(m)}$, per il modello e quella, $L_{0(p)}$, per il prototipo. Lo stesso rapporto sussiste per ogni coppia di lunghezze corrispondenti, l'una nel modello e l'altra nel prototipo.

Se il modello e il prototipo sono simili

similitudine cinematica

geometricamente e accade pure che corrispondano tra loro tutti i rapporti di velocità (indicati nella seconda riga di Tab. X) si dice che essi posseggono similitudine cinematica. Se la corrispondenza si estende oltre la similitudine geometrica e cinematica fino a includere i rapporti tra le forze (quarta riga delle grandezze adimensionali di Tab. X) si dice che il modello e il prototipo hanno similitudine dinamica. Ciò che è richiesto per la similitudine dinamica

similitudine dinamica

implica automaticamente l'uguaglianza dei rapporti di densità, ma va ben al di là, in quanto anche le forze dovute all'attrito, all'elasticità, alla tensione superficiale e così via devono essere prese in considerazione.

L'esame delle scale è più complesso per le similitudini cinematica e dinamica che per quella geometrica.

8.2.6 Scale. L'aver fissato le scale di lunghezza e di velocità per un modello simile cinematicamente al suo prototipo implica automaticamente la scala del tempo, come è stato dedotto in particolare nell'esempio dei modelli acustici. L'approccio sistematico all'interdipendenza tra le scale di lunghezza, di velocità e di tempo si impernia sulla corrispondenza dei rapporti adimensionali tra il prototipo e il modello. Nella settima riga di Tab. X si mostra che la grandezza adimensionale che caratterizza i tempi di riferimento è $T_0 v_0 / L_0$ (talvolta chiamata numero di Thompson). Se questo numero deve avere lo stesso valore sia nel modello sia nel prototipo, allora:

$$\frac{T_{0(m)} v_{0(m)}}{L_{0(m)}} = \frac{T_{0(p)} v_{0(p)}}{L_{0(p)}},$$

che può facilmente essere riscritto come:

$$\frac{T_{0(m)}}{T_{0(p)}} \cdot \frac{v_{0(m)}}{v_{0(p)}} = \frac{L_{0(m)}}{L_{0(p)}}.$$

Questa formula ci permette di ricavare uno qualunque dei tre fattori di scala quando gli altri due sono stati decisi. Nei modelli acustici, è praticamente impossibile avere velocità differenti per le onde sonore nel modello e nel prototipo, così che $v_{0(m)}/v_{0(p)}$ è uguale a 1. L'equazione dice che, sotto queste condizioni, la scala del tempo deve essere uguale a quella delle lunghezze: si ritrova, cioè, in maniera sistematica, la precedente conclusione.

La scala dell'accelerazione, come quella del tempo, è connessa alle scale di lunghezza e di velocità. Ciò si può trovare facendo corrispondere i numeri adimensionali $a_0 L_0 / v_0^2$ per il modello e per il prototipo (quinta riga di Tab. X).

Nei problemi in cui l'accelerazione dovuta alla gravità è una variabile significativa, tale accelerazione viene di solito assunta come accelerazione di riferimento a_0. Il numero $a_0 L_0 / v_0^2$ viene allora sostituito da $g_0 L_0 / v_0^2$. Il reciproco di tale grandezza adimensionale è detto numero di Froude.

Per ottenere la similitudine dinamica, può essere necessario introdurre parecchi altri numeri adimensionali nella determinazione delle scale per le diverse proprietà fisiche. Ad esempio, per la forza, la viscosità, la tensione superficiale e la comprimibilità, dalla Tab. X o dalla Tab. VII si ottiene: $F_0/(\rho_0 L_0^2 v_0^2)$, $\mu_0/(\rho_0 L_0 v_0)$, $\sigma_0/(\rho_0 L_0 v_0^2)$ e $k_0/(\rho_0 v_0^2)$. Il primo di tali numeri è talvolta chiamato numero di Newton, quando F_0 è una forza aerodinamica. I reciproci dei restanti tre sono chiamati rispettivamente numero di Reynolds, di Weber e di Cauchy. Il numero di Cauchy è il quadrato del numero di Mach, di cui si sarà probabilmente sentito parlare a proposito del volo supersonico.

8.2.7 I modelli in scala nella realtà. Sulla base di quanto visto finora in questo capitolo, si sarebbe tentati di dire che, armati della teoria, si possono utilizzare i modelli in scala per la soluzione di ogni problema dell'ingegneria. Ma tale conclusione è errata. Il metodo come è nella realtà può essere spiegato più facilmente per mezzo di un esempio; vale la pena di tornare ancora una volta al battello che naviga su un oceano infinito.

La necessità di scegliere dei motori per il battello fornisce una buona indicazione della forza necessaria per la propulsione dell'imbercazione. Essa è una delle ragioni per cui vengono costruiti e provati modelli in scala delle imbarcazioni, ed è appunto quella di cui ci occuperemo. La forza in questione è quella necessaria per vincere la resistenza al moto del battello. Essa è la variabile dipendente del problema, cioè la caratteristica del comportamento del battello che il modello deve permettere di determinare. Le variabili indipendenti sono i fattori da cui dipende la resistenza al moto del battello. Ci si può aspettare che essi comprendano la forma, la lunghezza e la velocità del battello, il suo pescaggio, la ruvidità del suo scafo. Le proprietà rilevanti dell'acqua possono includere la densità, la tensione superficiale e la viscosità. Un altro fattore importante sarà l'accelerazione di gravità, giacché la gravità è uno degli elementi che maggiormente influenzano la forma della superficie libera dell'acqua e quindi la formazione delle onde (si potrebbe dire che un battello deve spostare l'acqua dal suo percorso contro la forza di gravità).

Il primo passo per costruire un modello dinamicamente simile al battello in moto è di assicurarsi della similitudine geometrica. La costruzione di uno scafo modello avente le stesse proporzioni del battello e con pescaggio nella scala opportuna non presenta eccessive difficoltà. Tuttavia, la richiesta di similitudine geometrica riguarda anche la struttura fine dello scafo (le incrostazioni sul fondo del battello, ad esempio) e la rugosità dello scafo varia se il battello invecchia o viene pulito. Inoltre non è facile caratterizzare la rugosità.

Difficoltà anche maggiori appaiono quando si affronta la questione della completa similitudine dinamica. Se si tiene conto della tensione superficiale, della viscosità e della gravità è necessario che si corrispondano i numeri di Weber, di Reynolds e di Froude, per il modello e per il prototipo.

Consideriamo per primo il numero di Froude. La similitudine richiede che $g_0 L_0/v_0^2$ abbia lo stesso valore per il modello e per il prototipo. Poiché non è possibile disporre le cose in modo da provare un modello in un campo gravitazionale diverso da quello presente sulla superficie terrestre, i valori di L_0/v_0^2 devono essere fatti corrispondere. Ciò significa che le scale di lunghezza e di velocità evono essere legate l'una all'altra mediante la relazione:

$$\left(\frac{L_{0(m)}}{L_{0(p)}}\right) = \left(\frac{v_{0(m)}}{v_{0(p)}}\right)^2$$

L'uguaglianza dei numeri di Reynolds comporta che $\mu_0/\rho_0 L_0 v_0$ abbia lo stesso valore nel modello e nel prototipo, ma se le prove sul modello vanno fatte nell'acqua, μ_0 e ρ_0 avranno gli stessi valori per entrambi. Quindi $L_0 v_0$ deve essere lo stesso per il modello e per il prototipo, cioè:

$$\left(\frac{L_{0(m)}}{L_{0(p)}}\right) \cdot \left(\frac{v_{0(m)}}{v_{0(p)}}\right) = 1,$$

e pone una seconda condizione da soddisfare per le scale di lunghezza e di velocità.

Le due condizioni che abbiamo dedotto ammettono soltanto una soluzione: che il modello abbia le stesse dimensioni assolute del battello e che entrambi viaggino alla stessa velocità. Dovete convenire che questa non è una prospettiva incoraggiante per il progettista di una superpetroliera. Gli sforzi per evitare questa conclusione mediante la ricerca di un liquido speciale per il quale la grandezza μ/ρ (talvolta indicata con ν e chiamata viscosità cinematica) abbia un valore diverso che per l'acqua non sono stati coronati da successo.

Procedere a considerare l'uguaglianza dei numeri di Weber è privo di senso. È impossibile assicurare la completa similitudine dinamica con un modello di dimensioni ragionevoli. Deve risultare sufficiente un qualche tipo di similitudine dinamica incompleta.

La prima semplificazione consiste nel trascurare il numero di Weber, il che equivale a ignorare l'effetto della tensione superficiale. Questa è una semplificazione molto ragionevole: benché un ago da cucito disposto con cura sulla superficie dell'acqua in quiete possa essere sostenuto dalla tensione superficiale, questo non può accadere per un ferro da calza d'acciaio. La tensione superficiale produce effetti trascurabili su oggetti che non siano molto piccoli.

Se fosse anche possibile trascurare l'effetto della viscosità e del campo gravitazionale tutto andrebbe bene. In parecchi problemi un unico numero adimensionale è la sola variabile indipendente significativa, ma la resistenza al moto di un battello non è così semplice.

Ciò che in effetti viene fatto consiste nel procedere con l'ipotesi che la resistenza totale del battello sia data dalla somma di due forze, una dipendente soltanto dal numero di Reynolds, l'altra soltanto dal numero di Froude. Si suppone, cioè, che gli effetti viscosi e gravitazionali non interagiscano tra loro in nessun modo. Tale supposizione è connessa con l'idea che la resistenza viscosa sia dovuta essenzialmente all'attrito di trascinamento dell'acqua aderente alla superficie dello scafo, mentre la resistenza derivante da effetti gravitazionali dipenderebbe dal fatto che il battello, muovendosi, spinge l'acqua lontano, creando in tal modo le onde. Si concepisce quindi la resistenza totale come costituita da una resistenza d'attrito e da una resistenza d'onda.

L'ulteriore assunzione che l'effetto dell'attrito non dipenda dalla forma dettagliata dello scafo permette di stimare la resistenza d'attrito dai risultati di prove effettuate trascinando nell'acqua sottili lastre piatte senza produrre onde. Tali prove e calcoli possono essere effettuati sia per il modello sia per il prototipo. In verità questa volta la sorte è favorevole al progettista poiché le prove possono essere fatte con lastre dei materiali effettivamente usati nel modello e nel prototipo; ciò significa che ci siamo liberati delle complicazioni connesse con la rugosità.

Viene ora costruito un battello modello in una scala di lunghezza opportuna ed esso viene provato a una velocità data dalla scala di velocità ottenuta uguagliando soltanto il numero di Froude a quello del prototipo. Sottraendo dalla resistenza totale misurata la resistenza d'attrito calcolata si ottiene la resistenza d'onda per il modello.

Esercizio. Trovare la scala delle velocità se la scala delle lunghezze è 1:64.

Risposta. Se $\frac{g_{0(m)}L_{0(m)}}{v^2_{0(m)}} = \frac{g_{0(p)}L_{0(p)}}{v^2_{0(p)}}$, allora $\frac{g_{0(m)}}{g_{0(p)}} \cdot \frac{L_{0(m)}}{L_{0(p)}} = \frac{v^2_{0(m)}}{v^2_{0(p)}}$;

ponendo $g_{0(m)}/g_{0(p)} = 1$ e $L_{0(m)}/L_{0(p)} = 1/64$, si ottiene: $v_{0(m)}/v_{0(p)} = \sqrt{1/64} = 1/8$.

La resistenza d'onda è assunta come forza di riferimento nel modello e nel prototipo. L'uguaglianza dei numeri di Froude per il modello e il prototipo implica che essi siano simili per quanto riguarda la produzione di onde, così che il numero adimensionale $F_0/(\rho_0 L_0^2 v_0^2)$ avrà lo stesso valore per entrambi. Si ottiene in tal modo il fattore di scala per le forze che producono le onde e si può quindi trovare la resistenza d'onda del prototipo proporzionandola in scala su quella del modello.

Esercizio. Trovare il fattore di scala per le forze che producono le onde se le scale di lunghezza e di velocità sono 1/64 e 1/8.

Risposta. Da: $\frac{F_{0(m)}}{\rho_{0(m)}L^2_{0(m)}v^2_{0(m)}} = \frac{F_{0(p)}}{\rho_{0(m)}L^2_{0(p)}v^2_{0(p)}}$

si ottiene:

$$\frac{F_{0(m)}}{F_{0(p)}} = \frac{\rho_{0(m)}}{\rho_{0(p)}} \cdot \frac{L^2_{0(m)}}{L^2_{0(p)}} \cdot \frac{v^2_{0(m)}}{v^2_{0(p)}} = 1\left(\frac{1}{64}\right)^2 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{262144}.$$

La resistenza totale al moto del battello si trova sommando alla stima calcolata della sua resistenza d'attrito la resistenza d'onda ottenuta dai risultati delle prove sul modello.

È necessario procedere con cautela nella scelta della scala di lunghezza, come in certi dettagli delle prove. Benché gli effetti della tensione superficiale siano trascurabili per il prototipo (che è grande), l'omissione del numero di Weber in base a considerazioni di similitudine può consentire che tali effetti diventino significativi nel caso che il modello venga fatto troppo piccolo. (Un piccolo battello può essere spinto avanti in una vasca da una soluzione assai debole di detersivo fatta gocciolare dalla sua poppa, riducendo così la tensione superficiale dietro ad esso). Inoltre l'assunzione, fatta inizialmente per il prototipo, di acqua molto profonda e di sponde molto lontane deve riflettersi nelle dimensioni relative del modello e della vasca in cui questo viene provato. Questioni siffatte,

effetti di scala

che limitano la scelta pratica delle scale, sono chiamate effetti di scala.

La procedura descritta per trovare la resistenza al moto di un battello si basa su ipotesi sull'origine fisica della resistenza, ed è giustificata soltanto in base ai risultati che permette di ottenere. È stata ideata dall'ingegnere inglese William Froude intorno al 1870 e il suo successo si riflette nel nome del numero di Froude.

Questo capitolo non tende a insegnare a progettare navi. Esso si propone di illustrare, più semplicemente, il modo in cui speciali tecniche modellistiche possono essere sviluppate in particolari settori della tecnologia. Nei modelli dei fiumi e degli estuari, gli effetti di scala dovuti alla tensione superficiale rendono necessario sviluppare tecniche che fanno uso di modelli

tecniche modellistiche

alterati; in acustica sono necessari metodi speciali per costruire modelli dei materiali che assorbono il suono; gli ingegneri aeronautici devono sviluppare metodi opportuni per evitare la necessità di velocità impossibili nei tunnel a vento o la necessità di modelli più grandi degli stessi prototipi. Quando, proprio all'inizio, si è detto che nei modelli in scala è necessario conoscere che cosa importa, ma non come o perché, naturalmente si stava semplificando un po' troppo. Il mestiere di costruire modelli in scala richiede a colui che lo pratica una comprensione sufficiente del come e del perché dei fenomeni che lo salvi dagli effetti di scala e lo liberi dalle implicazioni, spesso troppo restrittive, della teoria della similitudine.

Si svolgano ora gli esercizi 13, 14, 15, 16, 17 di autovalutazione.

Esercizio 1. Un treno parte a mezzanotte dalla stazione A viaggiando in direzione nord a 50 km h^{-1}. Un secondo treno parte dalla stazione B, situata 200 km a nord di A, alle 01.30 viaggiando verso sud a 75 km h^{-1}. Si determini mediante un grafico dove e quando si incontreranno. Si traduca in equazione algebrica il movimento dei due treni. Si mostri come la soluzione grafica soddisfi entrambe le equazioni (entro l'approssimazione del grafico).

Esercizio 2. Calcolare $\dfrac{5{,}3 \times 62{,}9 \times 0{,}24}{102{,}7 \times 0{,}45 \times 22{,}3}$ usando il regolo calcolatore.

Esercizio 3. Semplificare

$$\frac{b - a + b \times b + a + a \times b + b}{a \times a + 2b + 1 - a^2 + 1 - b + a}.$$

Esercizio 4. Semplificare la seguente espressione:

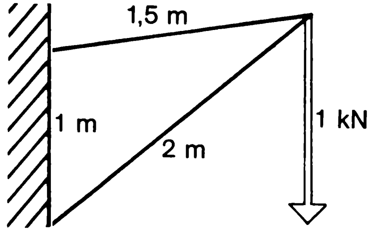
$$\log a + 2 \log b - \frac{1}{2} \log ab.$$

Esercizio 5. Qual è il significato di imposta 'progressiva' sul reddito?

Esercizio 6. Risolvere l'equazione $4x^2 + x - 3 = 0$ applicando la formula per la soluzione delle equazioni quadratiche e poi disegnando le curve $4x^2$ e $(3-x)$ in funzione di x.

Esercizio 7. Un serbatoio contenente 100 l d'acqua viene svuotato attraverso un tubicino in modo che la velocità di svuotamento (in litri/ora) sia pari al volume dell'acqua che rimane nel serbatoio. Si tracci un grafico per determinare approssimativamente quanta acqua sarà uscita in un'ora. È possibile determinare con questo metodo il tempo necessario per svuotare completamente il serbatoio?

Esercizio 8. Quanto valgono le forze nelle due aste del supporto illustrato nella figura seguente?



Esercizio 9. Si commentino i valori ottenuti durante un esperimento per misurare l'allungamento di una sbarra sottoposta ad un certo carico, quali risultano dalla tabellina qui riprodotta.

carico (t_p)	0	1	2	3	4	3	2	4	5	4	3	2	1	0
allungam. (mm)	0	3,4	6,9	10,1	14,6	10,1	6,9	14,6	21,6	16,4	12,1	8,9	5,4	2,0

Esercizio 10. Un recipiente è riempito con aria a pressione atmosferica e temperatura ambiente (20 °C). Mediante un pistone a tenuta l'aria viene compressa fino a dimezzare il suo volume iniziale, mentre si fa salire la temperatura fino a 100 °C. Che pressione si raggiungerà in queste condizioni?

Esercizio 11. L'ammoniaca, NH_3, è un gas velenoso di odore penetrante. Quali saranno le proprietà della fosfina PH_3 e dell'arsina AsH_3?

Il sodio reagisce violentemente con l'acqua secondo la reazione: $2\ Na + 2\ H_2O \rightarrow 2\ NaOH + H_2$
Come si comporta il cesio a contatto con l'acqua?

Esercizio 12. Scrivere le formule dei seguenti composti chimici e disegnare le strutture dei loro legami (lasciando separat i due gruppi):

seleniuro di arsenico	idrogeno solforato
carbonato di bario	piombo tetraetile
idrato di calcio	nitrato di magnesio
cicloesano (sei atomi di carbonio)	cianuro di potassio
bromuro di germanio	silano (silicio ed idrogeno)

(Si richiede di dedurre le strutture partendo dal modello spiegato nel testo. In pratica le strutture potrebbero essere diverse. Tutti questi composti, tuttavia, esistono veramente).

Esercizio 13. Di seguito sono elencate le definizioni di alcune grandezze fisiche:

a) lo sforzo, τ, su una superficie, è definito come la forza per unità di area della superficie;

b) il gradiente di velocità, dv/dx, in un fluido, è definito come il tasso di variazione di velocità, v, con la posizione, x;

c) la viscosità, μ, di un fluido è lo sforzo tangenziale per unità di gradiente della velocità;

d) il coefficiente elastico, k, di una molla è la forza per unità di allungamento della molla;

e) la forza necessaria a muovere un corpo uniformemente attraverso un fluido alla velocità v può essere espressa da una formula del tipo

$$F = Cv^n$$

dove n è una costante adimensionale. C può essere chiamato coefficiente di smorzamento.

Si trovino le dimensioni di τ, dv/dx, μ, k e C in termini di $[M]$, $[L]$ e $[T]$.

Esercizio 14. Una massa M è attaccata all'estremità libera di una molla avente coefficiente elastico k. Si noti cosa si può ricavare relativamente al periodo, T, di oscillazione del sistema, considerando le dimensioni delle grandezze fisiche rilevanti per il fenomeno.

Esercizio 15. Un pendolo viene realizzato sospendendo una massa M all'estremità libera di un'asticella priva di peso e avente lunghezza l, in un luogo dove l'accelerazione di gravità è g. Si usino argomenti dimensionali per discutere il modo in cui il periodo, T, di oscillazione del pendolo dipende da M, l, g e α, l'angolo che il pendolo forma con la verticale quando viene abbandonato inizialmente.

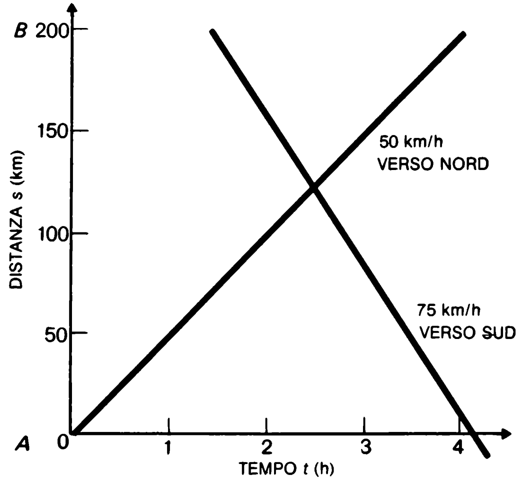
Quale sarà l'effetto su T di un raddoppiamento della massa?

Quale sarà l'effetto su T di un raddoppiamento dell'angolo α?

Esercizio 16. Se le oscillazioni del pendolo dell'esercizio 15 sono soggette a smorzamento del tipo menzionato nell'esercizio 13, con $n = 1$, allora il coefficiente C è una variabile fisica rilevante. Trovare un insieme di prodotti adimensionali mediante i quali si possa trattare questo problema per esteso.

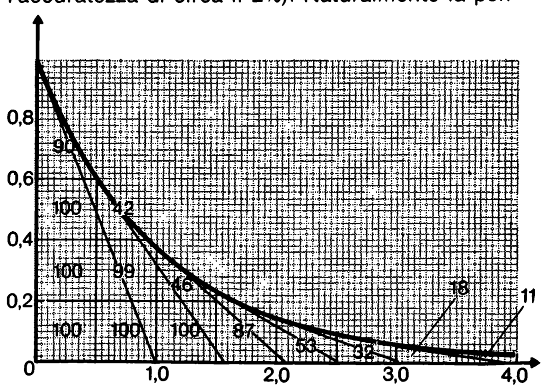
Esercizio 17. Gli esperimenti per determinare l'andamento indicato nell'esercizio 15 devono essere effettuati provando un pendolo nell'aria. È probabile che sorgano difficoltà legate ad effetti di scala? Se la risposta è affermativa quali misure dovrebbero essere adottate per contrastarle?

Esercizio 1. I treni si incrociano alle ore 02.30, a 125 km a nord di A. Si ha, per il treno 1, $s = 50\,t$; per il treno 2, $s = 200 - 75\,(t - 1{,}5)$. Se in ogni equazione si sostituisce $t = 2{,}5$ si ottiene $s = 125$. Si noti che i

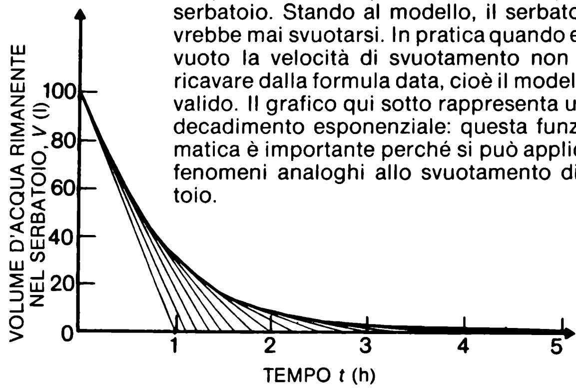


grafici offrono un metodo conveniente per risolvere le equazioni simultanee, specialmente quando non è necessaria una grande precisione.

Esercizio 2. Dai dati ricavati dal grafico ottenuto tracciando tangenti successive e correggendone man mano la pendenza, si ricava che, dopo un'ora, il volume d'acqua residuo è pari a circa 36 l (con l'accuratezza di circa il 2%). Naturalmente la pen-



denza diminuisce via via che passa il tempo, ma non raggiunge mai lo zero; così la curva non incontrerà mai l'asse dei tempi: non si può quindi calcolare il tempo necessario per svuotare completamente il serbatoio. Stando al modello, il serbatoio non dovrebbe mai svuotarsi. In pratica quando esso è quasi vuoto la velocità di svuotamento non si può più ricavare dalla formula data, cioè il modello non è più valido. Il grafico qui sotto rappresenta una curva di decadimento esponenziale: questa funzione matematica è importante perché si può applicare a molti fenomeni analoghi allo svuotamento di un serbatoio.



Esercizio 3. La risposta è 0,078. Il miglior ordine di esecuzione del calcolo è il seguente: dividere 5,3 per 4,5, moltiplicare per 6,29, dividere per 2,23, moltiplicare per 2,4, dividere per 1,027. In tal modo le operazioni possono essere effettuate sul regolo senza bisogno di annotare i risultati a parte e senza mai uscire dalla scala del regolo. Il risultato è 7,77. La posizione della virgola si trova calcolando il valore approssimativo della sequenza di operazioni, cioè eseguendola su numeri arrotondati:

$$\frac{5 \times 60 \times 0,2}{100 \times 0,5 \times 20} = \frac{6}{100} = 0,06.$$

Si ha in tal modo un'idea dell'ordine di grandezza del risultato cercato.

Esercizio 4.

$$\frac{2b + ab + b^2}{2 + a + b} = \frac{b(2 + a + b)}{2 + a + b} = b.$$

Esercizio 5.

$$\log (a^{1/2}b^{3/2}) \text{ o } \log (\sqrt{ab^3}) \text{ o } \frac{1}{2} \log (ab^3).$$

Esercizio 6. L'imposta sul reddito viene pagata dal cittadino quando il suo reddito supera un certo livello minimo, e cresce al crescere del reddito: se ne desume una possibile imposta negativa sul reddito, che lo stato dovrebbe pagare al cittadino che percepisce un reddito inferiore al livello minimo. (Questa imposta negativa sul reddito è stata proposta più volte come uno dei possibili provvedimenti per alleviare la povertà).

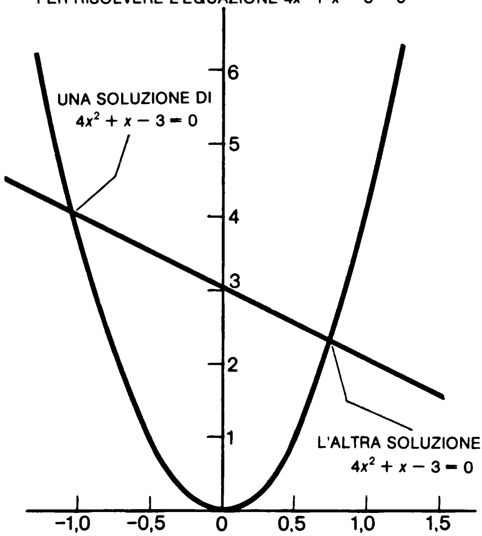
Esercizio 7. Mediante la formula

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = -1 \text{ o } +3/4$$

oppure $4x^2 + x - 3 = (x + 1)(4x - 3) = 0$, da cui si ricava rispettivamente $x + 1 = 0$, cioè $x = -1$, e $4x - 3 = 0$, cioè $x = 3/4$.

Gli stessi valori possono essere ottenuti dai punti di intersezione della retta $y = 3 - x$ con la parabola

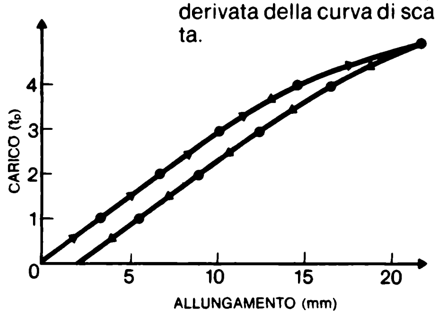
GRAFICI DI $y = 4x^2$ E $y = 3 - x$
PER RISOLVERE L'EQUAZIONE $4x^2 + x - 3 = 0$



$y = 4x^2$, perché in tali punti si verifica $y = 4x^2 = 3 - x$, ovvero $4x^2 + x - 3 = 0$. Si noti che la maggior parte delle equazioni può essere risolta in modo approssimativo con metodi grafici.

Esercizio 8. Sforzo di compressione, nell'asta inferiore, pari a 2 kN, sforzo di tensione, nell'asta superiore, pari a 1,5 kN (si noti che in questo caso non è necessario disegnare il triangolo delle forze in modo accurato poiché esso è simile al triangolo in figura, i cui lati sono noti).

Esercizio 9. Il modo migliore per vedere che cosa è successo è di riportare su un grafico i dati di carico in funzione dell'allungamento. Il grafico è lineare (cioè obbedisce alla legge di Hooke) con una pendenza di 3 t_p per millimetro; inoltre viene mantenuta l'elasticità fino a 4 t_p (cioè la barra ritorna alle dimensioni originali se scaricata). Per carichi superiori a 4 t_p la barra perde l'elasticità e presenta una deformazione residua di 2 mm quando viene scaricata. La derivata della curva di scarico resta tuttavia immutata.



Esercizio 10. $\dfrac{PV}{T}$ = costante $= \dfrac{P_0 V_0}{T_0}$, essendo P_0, V_0 e T_0 i valori iniziali dati nel problema, così come sono dati V e T. (Ricordate che la temperatura è quella assoluta, pertanto $T_0 = 273 + 20 = 293$ K, $T = 273 + 100 = 373$ K.)

Ricaviamo facilmente:

$$P = P_0 \frac{V_0}{V} \frac{T}{T_0} = 1 \text{ atm} \times 2 \times \frac{373}{293} = 2{,}54 \text{ atm.}$$

Esercizio 11. Si può essere praticamente certi che sia l'arsina sia la fosfina sono composti di odore penetrante, velenosi e volatili.

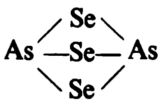
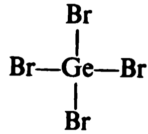
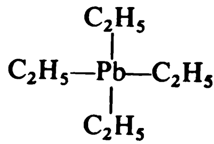
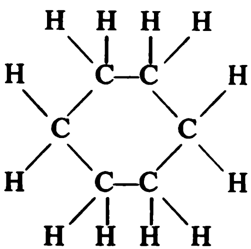
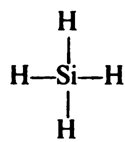
Anche la reazione $2\,Cs + 2\,H_0O \rightarrow 2\,CsOH + H_0$ sarà certamente rapida, cosicché il cesio, allo stesso modo del sodio, deve essere tenuto lontano dal contatto con l'acqua (e con l'aria umida). Sapendo inoltre che il potassio reagisce più violentemente del sodio, si potrà arguire che ancor più violenta sarà la reazione del cesio.

Esercizio 12. Si veda la figura sulla pagina a fronte.

Esercizio 13.

a) $[\tau] = \left[\dfrac{F}{A}\right] = \left[\dfrac{MLT^{-2}}{L^2}\right] = [ML^{-1}T^{-2}]$;

b) $\left[\dfrac{dv}{dx}\right] = \dfrac{[dv]}{[dx]} = \dfrac{[v]}{[x]} = \dfrac{[LT^{-1}]}{[L]} = [T^{-1}]$;

As_2Se_3		$GeBr_4$	
$BaCO_3$	Ba^{2+} CO_3^{2-}	H_2S	H—S—H
$Ca(OH)_2$	Ca^{2+} OH^- OH^-	$Pb(C_2H_5)_4$	
C_6H_{12}		$Mg(NO_3)_2$	Mg^{2+} NO_3^- NO_3^-
		KCN	K^+ $(CN)^-$
		SiH_4	

$$\text{c) } [\mu] = \frac{[\tau]}{\left[\frac{dv}{dx}\right]} = \frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[T^{-1}]} = [ML^{-1}T^{-1}];$$

$$\text{d) } [k] = \left[\frac{F}{L}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L}\right] = [MT^{-2}];$$

$$\text{e) } [C] = \left[\frac{F}{v^n}\right] = \left[\frac{MLT^{-2}}{L^nT^{-n}}\right] = [ML^{1-n}T^{n-2}].$$

Le dimensioni della forza, dell'area e della velocità sono riportate in Tab. VI. In b) gli incrementi infinitesimi dv e dx hanno rispettivamente le stesse dimensioni di v e di x. Il fatto di essere infinitesimi non muta le loro dimensioni. In c) vanno utilizzati i risultati di a) e di b).

Esercizio 14. In base all'esercizio 13, le dimensioni di k sono $[MT^{-2}]$, mentre quelle di T e di M sono ovviamente $[T]$ e $[M]$. Poiché $[L]$ non compare, nel problema ci sono solo due dimensioni indipendenti, $[M]$

e $[T]$. Il teorema di Buckingham ci dice che il numero di prodotti adimensionali che possono essere necessari per rispondere è uguale al numero delle variabili fisiche (in questo caso tre: k, M e T) meno il numero delle dimensioni indipendenti (in questo caso due). Vi è quindi un solo prodotto adimensionale che può essere trovato, ed è facilmente calcolato: le dimensioni di k sono $[MT^{-2}]$, così che le dimensioni di k/M sono $[T^{-2}]$, e quindi kT^2/M è adimensionale.

Ora il teorema di Buckingham asserisce che tutte le relazioni fisiche sono tra prodotti adimensionali. Poiché vi è un solo prodotto adimensionale in questo problema, il massimo che se ne possa dire è che esso ha un particolare valore numerico: diciamo b^2. Allora:

$$\frac{kT^2}{M} = b^2,$$

ovvero:

$$T = b\sqrt{\frac{M}{k}}$$

e noi conosciamo quindi esattamente il modo in cui T dipende da M e da k. Naturalmente, non conosciamo b, ma lo possiamo calcolare per mezzo di un esperimento, ottenendo quindi un modello valido per ogni massa ed ogni molla.

Per mostrare che il valore teorico di b è 2π occorrono molti passaggi matematici.

Esercizio 15. In questo problema ci sono cinque variabili (M, l, g, T, α) e tre dimensioni indipendenti ($[M]$, $[L]$, $[T]$). Ci sono quindi $5 - 3 = 2$ grandezze adimensionali che devono essere correlate l'una all'altra. L'angolo, α, è adimensionale e potrà costituire una di queste due grandezze. Le dimensioni di g sono $[LT^{-2}]$ così che gT^2/l è adimensionale, e costituirà il secondo prodotto adimensionale cercato. Poiché M è la sola delle cinque grandezze fisiche le cui dimensioni implicano $[M]$, essa non può in alcun modo essere combinata con le altre grandezze fisiche per dare un prodotto adimensionale. Quindi M non può comparire in nessuna relazione tra prodotti adimensionali, e pertanto non può avere nessun effetto sul periodo.

Ne concludiamo che gT^2/l dipende in qualche modo da α, ma per ottenere i dettagli della relazione che esprime questa dipendenza sarebbero necessari o un certo numero di esperimenti o una più approfondita analisi matematica.

Un raddoppiamento della massa lascia quindi il periodo immutato, mentre l'effetto di un raddoppiamento dell'angolo con cui il pendolo è abbandonato inizialmente potrebbe essere accertato solo per mezzo di indagini ulteriori.

Esercizio 16. Le variabili sono M, l, T, g, α, C: sei in tutto. Tre sono le dimensioni indipendenti, di modo che sono necessari tre prodotti adimensionali. Due di questi possono essere presi come nell'esercizio 15, cioè gT^2/l e α. Il terzo dovrà contenere C. Dall'esercizio 13 si sa che le dimensioni di C sono $[MT^{-2}]$ quando $n = 1$; quindi C/M ha dimensioni $[T^{-2}]$. È possibile pertanto formare il prodotto adimensionale CT^2/M, ma non è molto conveniente, in quanto tale prodotto contiene T, che è la nostra variabile dipendente. È più utile ricercare un modo differente di trovare una grandezza avente dimensioni $[T^2]$, con cui moltiplicare C/M. Abbiamo $[g] = [LT^{-2}]$, per cui $[l/g] = [T^2]$. Quindi Cl/Mg è adimensionale e servirà per caratterizzare lo smorzamento. I tre prodotti adimensionali cercati sono gT^2/l, α e Cl/Mg.

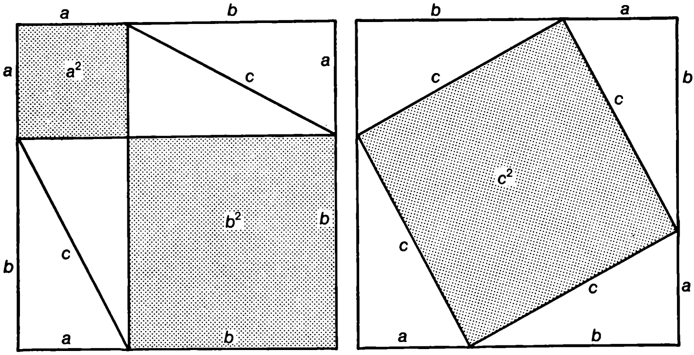
Si noti che quando il moto è smorzato, l'ampiezza delle oscillazioni del pendolo si attenua via via. Non si può pertanto essere certi che il tempo impiegato dal pendolo per compiere le successive oscillazioni rimanga sempre lo stesso, e bisognerà essere preparati a usare un'ulteriore variabile, un numero intero, ad esempio m, per indicare la m-esima oscillazione. Trattandosi di un numero, m è naturalmente adimensionale.

Esercizio 17. Il moto di un pendolo nell'aria è un moto smorzato. L'opportuna descrizione delle circostanze sperimentali dovrebbe quindi, come nell'esercizio 16, includere C, il coefficiente di smorzamento. Ci si può quindi aspettare che effetti di scala, dovuti allo smorzamento che è stato trascurato, modifichino l'andamento basato unicamente sui prodotti adimensionali gT^2/l e α. Il terzo prodotto adimensionale Cl/Mg è nullo per $C = 0$, ma se C non può essere reso uguale a zero negli esperimenti (effettuandoli nel vuoto), allora si può almeno rendere piccolo il valore di Cl/Mg usando un pendolo corto (per avere un piccolo valore di l) e dotato di un pendaglio massiccio (per avere un alto valore di M).

Appendice 1

Il teorema di Pitagora

I due quadrati grandi in figura hanno le stesse dimensioni. In ognuno di essi sono stati ricavati quattro triangoli rettangoli, ciascuno con i cateti di lunghezza *a* e *b* e l'ipotenusa di lunghezza *c*. In tutti e due i casi l'area rimanente è indicata in



Quattro triangoli identici in due diverse disposizioni all'interno dello stesso quadrato.

grigio. Nel quadrato grande di sinistra quest'area è formata da due quadrati più piccoli, uno di lato *a* e l'altro di lato *b*. Nel grande quadrato di destra invece l'area rimanente forma un solo quadrato di lato *c* (esso è indubbiamente un quadrato e lo si può dimostrare con facili considerazioni di simmetria). Si deduce allora che le aree in grigio nei due casi debbano essere equivalenti, e cioè: $c^2 = a^2 + b^2$. Questo è il teorema di Pitagora, solitamente così espresso in parole: in un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui suoi cateti.

Appendice 2

Passaggio al limite

Tutti i diagrammi di Fig. 1, qui sotto, rappresentano lo stesso grafico di moto di un treno (distanza in funzione del tempo). In ciascuno è tracciata la tangente nel punto *P* nonché una linea tratteggiata la cui inclinazione $\Delta s/\Delta t$ rappresenta la velocità media del treno nel breve intervallo Δt. Il diagramma mostra che, al diminuire della lunghezza dell'intervallo Δt, la velocità media si approssima a quella rappresentata dalla pendenza della tangente (la retta tratteggiata si avvicina man mano alla tangente). Nella Fig. 2a sono riportati i punti, ricavati dalla Fig. 1, che rappresentano l'andamento di $\Delta s/\Delta t$ in funzione di

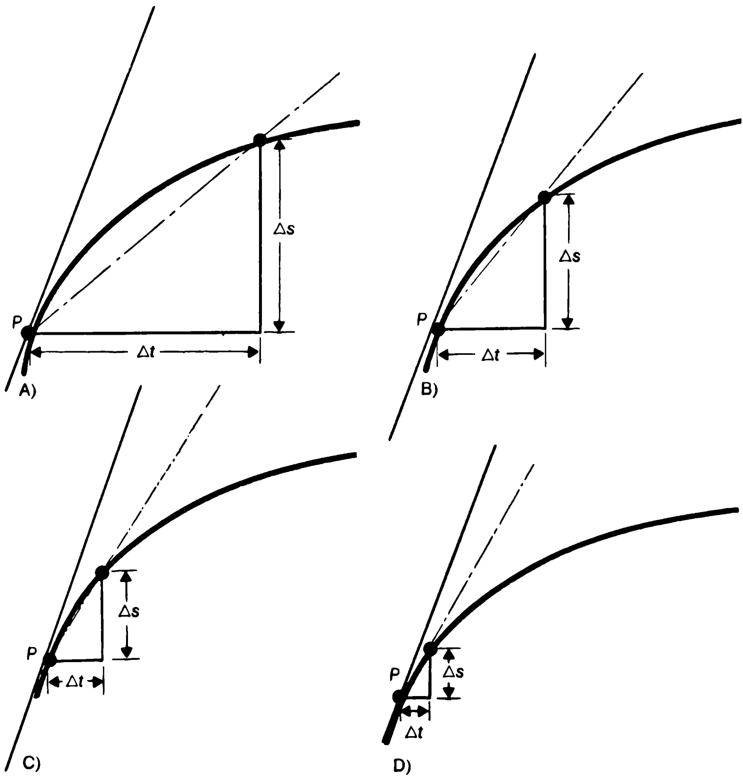


Fig. 1 Determinazione della velocità media in intervalli via via più piccoli.

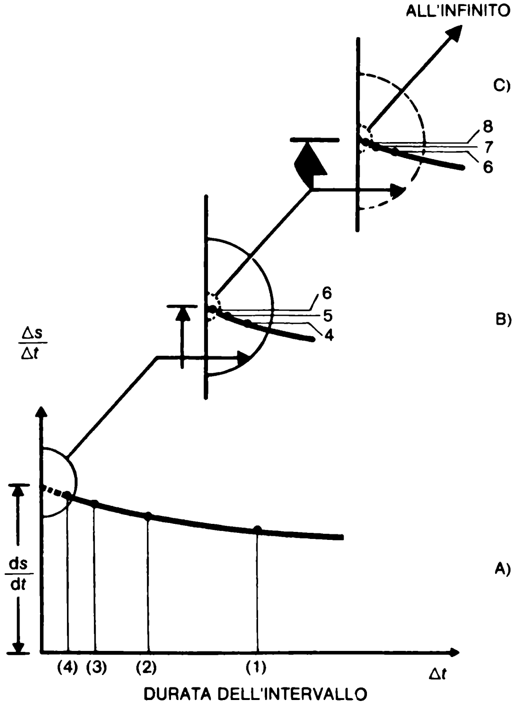


Fig. 2 Passaggio al limite.

Δt. La Fig. 2b,c mostra alcune parti ingrandite di questo grafico con i punti corrispondenti a intervalli Δt sempre più brevi. Si può vedere che questo processo può essere continuato indefinitamente: il grafico di Fig. 2a, prolungandosi via via verso l'asse delle ordinate, tenderà ad incontrarlo in un punto ben preciso. Questo punto non può essere considerato appartenente al grafico in quanto la divisione $\Delta s/\Delta t$ non è definita per $\Delta t = 0$. Si tratta perciò di un limite, cui la curva tende quando Δt tende a 0. La velocità corrispondente a questo punto è ds/dt (pendenza della tangente in P) e la sua definizione formale è la seguente:

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

che si legge: la derivata di s rispetto a t è uguale al limite di $\Delta s/\Delta t$ per Δt tendente a zero.

Appendice 3

Forze e cariche elettrostatiche

Quando ci si leva di dosso un indumento di nylon asciutto, si sente che esso tende a restare aderente al corpo e produce piccole scariche elettriche: le forze che causano questa adesione sono di tipo elettrostatico. Alla domanda: «Che cos'è l'elettricità?» si può solo rispondere che essa è ciò che causa questo tipo di forze.

Se due oggetti, A e B,si attraggono con forze elettrostatiche, un qualunque oggetto C che sia attratto elettrostaticamente da A sarà respinto da B. D'altra parte, se A respinge C, questo viene attratto da B. Se non si palesa alcuna forza elettrostatica fra A e C, non ve ne sarà neppure fra B e C. Il primo passo per costruire un modello di questa situazione è molto semplice. Si può ad esempio affermare che quando due oggetti sono mutuamente interessati da forze elettrostatiche, essi sono portatori di cariche elettriche. Di un oggetto che non sia attratto né respinto da un altro oggetto carico, si dirà che esso non è portatore di cariche. Si possono ora rappresentare con un modello le interazioni fra A, B e C dicendo che esistono due tipi di cariche, che verranno chiamate positive (+) e negative (−), e che il loro comportamento fa sì che cariche di ugual segno si respingono mentre cariche di segno opposto si attraggono. Per procedere è necessario a questo punto quantificare questo tipo di relazioni.

Si supponga di mantenere A e B nella stessa posizione e che, restando inalterato B, accada qualcosa ad A che fa raddoppiare la forza elettrostatica fra i due oggetti. Questo qualcosa può essere spiegato con il raddoppio della carica su A, e questa è una base quantitativa per gli esperimenti relativi alla misura di cariche e forze elettrostatiche. Questi esperimenti permettono di costruire un modello che correla le forze elettrostatiche fra due oggetti carichi, A e B, con le loro cariche Q_A e Q_B:

$$F_{AB} = \frac{Q_A Q_B}{K R_{AB}^2}.$$

F_{AB} rappresenta la forza di repulsione, agente sugli oggetti, in direzione della loro congiungente. R_{AB} è la distanza fra gli oggetti e K è una costante che dipende dal mezzo nel quale essi sono immersi (aria, olio, vuoto, ecc.). Si può vedere che quando i segni di Q_A e Q_B sono diversi, F_{AB} risulta negativa: una repulsione negativa non è che un'attrazione fra A e B. Le forze elettrostatiche fra due oggetti non sono disturbate da interazioni con altri oggetti carichi.

L'equazione scritta esprime la legge di Coulomb. L'unità di misura delle cariche elettriche è il coulomb (C). Legge e unità di misura prendono il nome dal fisico francese Charles Coulomb che pubblicò nel 1785 i risultati dei suoi esperimenti di elettrostatica. La legge di Coulomb è spesso chiamata legge quadratica inversa, in quanto l'equazione contiene a denominatore il quadrato della distanza fra gli oggetti carichi. Questo fatto implica che le interazioni elettrostatiche fra due oggetti aventi una data carica diminuiscono molto rapidamente all'aumentare della loro distanza reciproca.

Glossario

Algoritmo
Procedura di calcolo definita per eseguire una specifica operazione o un gruppo di operazioni.

Atomo
La più piccola unità di materia in cui un elemento chimico può essere suddiviso conservando la propria identità.

Calcolo integrale
Calcolo che consente di ricavare le proprietà quantitative in grande di una grandezza variabile (espressa da una funzione), a partire dalle proprietà locali supposte ovunque note. Nell'interpretazione geometrica, corrisponde al calcolo dell'area compresa tra la curva $y = f(x)$ che rappresenta la funzione e l'asse x.

Calcolo letterale
Calcolo espresso indicando le variabili mediante lettere, allo scopo di fornire regole generali valide per diversi valori numerici attribuibili alle variabili stesse.

Derivata di una funzione
La derivata di una funzione $y = f(x)$ è una funzione che descrive l'andamento del rapporto tra le variazioni corrispondenti infinitesime di y e di x, e si scrive: $y' = \frac{dy}{dx}$ Se la funzione è rappresentabile con una curva, la curva della sua derivata descrive l'andamento della pendenza delle tangenti alla curva in ogni suo punto.

Elemento chimico
Sostanza pura in cui tutti gli atomi hanno uguale numero atomico e uguale disposizione degli elettroni extranucleari.

Elettrolisi
Scomposizione delle molecole di un composto chimico negli ioni positivi e negativi in seguito al passaggio di corrente elettrica in una soluzione del composto stesso.

Elettrolita
Composto chimico che in soluzione subisce elettrolisi al passaggio di una corrente elettrica.

Equazione algebrica
Eguaglianza fra espressioni algebriche di forma diversa, verificata per determinati valori delle variabili presenti. Questi valori danno la soluzione dell'equazione.

Formula dimensionale
Prodotto delle potenze delle grandezze fondamentali con le quali la grandezza data può essere espressa, servendosi delle leggi della fisica.

Funzione
Corrispondenza tra gli elementi di due insiemi che associa ad ogni elemento del primo insieme uno e un solo elemento del secondo insieme. Il caso più frequente è quello di una corrispondenza tra due quantità variabili, che si scrive $y = f(x)$: x è la variabile indipendente, y è la variabile dipendente.

Grado di un'espressione algebrica (o di un'equazione)
Il grado più alto tra quelli dei monomi che costituiscono l'espressione (o l'equazione).

Grado di un monomio
La somma degli esponenti con cui compaiono nel monomio le diverse variabili che lo costituiscono.

Grado di un polinomio
Il grado più elevato tra quelli dei monomi che costituiscono il polinomio.

Grado kelvin (K)
Intervallo di temperatura sulla scala assoluta delle temperature, che parte dallo zero assoluto. Questa scala viene usata prevalentemente in termodinamica. Un grado kelvin (o, più brevemente, un kelvin) è equivalente a un grado centigrado.

Grandezza derivata
Grandezza fisica per la quale l'unità di misura viene ricavata a partire dalle grandezze fondamentali, sulla base delle relazioni stabilite dalle leggi fisiche.

Grandezza fisica
Proprietà misurabile di un corpo o di un sistema che interviene nella descrizione fisica dei fenomeni che interessano il corpo o il sistema; una serie di relazioni tra grandezze esprime il comportamento in

termini confrontabili e, attraverso la misura, traducibili in numeri.

Grandezza fondamentale
Grandezza fisica per la quale l'unità di misura viene definita in modo indipendente, con la condizione che in funzione delle grandezze fondamentali prescelte sia possibile esprimere tutte le altre grandezze, e che nessuna grandezza fondamentale possa essere espressa tramite le altre grandezze fondamentali.

Identità algebrica
Caso particolare di equazione algebrica, valida per qualsiasi valore delle variabili.

Integrale definito
L'integrale definito, $\int_a^b f(x)\,dx$, corrisponde all'area fra la curva che rappresenta $f(x)$ e l'asse x, nell'intervallo delimitato dai punti a e b dell'asse x.

Ione
Atomo o gruppo di atomi che ha acquistato una carica elettrica in seguito alla perdita o alla cattura di uno o più elettroni. Nel primo caso si ha uno ione dotato di carica positiva, o catione; nel secondo caso, uno ione dotato di carica negativa, anione.

Legame chimico
Ogni interazione tra atomi di elementi diversi, o anche dello stesso elemento, che porti alla formazione di molecole più o meno stabili.

Logaritmo
Il logaritmo di un numero in una data base è la potenza a cui va elevata la base per ottenere il numero stesso, e si indica col simbolo log (in genere in base 10) e ln (logaritmo naturale o in base 2).

Modulo di un numero
Il modulo, o valore assoluto, di un numero reale è il numero stesso considerato indipendentemente dal suo segno, e si indica ponendo il numero fra due sbarrette verticali.

Molecola
La più piccola particella di ogni composto o elemento chimico, capace di esistenza indipendente conservando la stessa composizione e le stesse proprietà chimiche.

Monomio
Espressione algebrica formata dal prodotto di un coefficiente numerico per una o più variabili, ciascuna elevata a un esponente intero positivo.

Numeri caratteristici
Rapporti adimensionali di grandezze, o gruppi di grandezze, fisiche. Servono per caratterizzare un fenomeno al variare delle condizioni, e quindi dei valori assunti dalle grandezze costituenti. Sono chiamati anche numeri adimensionali.

Numero atomico
Il numero di elettroni di un atomo neutro, pari al numero di protoni contenuti nel nucleo. Viene indicato con il simbolo Z.

Numero di massa
Il numero totale di protoni e di neutroni (cioè il numero totale di nucleoni) contenuti nel nucleo di un atomo. Viene indicato con il simbolo A.

Numero immaginario
Prodotto di un numero reale per l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1}$.

Numero reale
Ogni numero compreso nell'intervallo tra $-\infty$ e $+\infty$. Questo intervallo si dice campo di esistenza dei numeri reali.

Polinomio
Somma algebrica di più monomi.

Prodotto notevole (in matematica)
Prodotto i cui fattori sono costituiti da tipici polinomi letterali che ricorrono spesso nel calcolo algebrico.

Radiante
Unità di misura dell'angolo piano. Corrisponde all'angolo formato da due raggi di un cerchio che intercettano sulla circonferenza un arco di lunghezza uguale al raggio. L'intero angolo giro (360°) corrisponde a 2π rad.

Reciproco
Il reciproco (o inverso) di un numero è un altro numero tale che, moltiplicandolo per il numero di partenza, si ottiene l'unità.

Sistema di unità di misura
Insieme coerente di unità di misura adottate per misurare le grandezze fondamentali e quelle derivate, le cui unità si ottengono dalla combinazione delle prime. La coerenza si ottiene rispettando, tra le unità di misura, un collegamento che riproduce le relazioni tra le grandezze in gioco fornite dalle leggi della fisica.

Sistema Internazionale (SI)
Sistema di unità di misura che assume come grandezze fondamentali la lunghezza, la massa, il tempo, l'intensità di corrente elettrica, e come unità di misura, rispettivamente, il metro (m), il kilogrammo (kg), il secondo (s), l'ampere (A).

Unità di misura
Grandezza fisica assunta come campione, cioè come grandezza di riferimento, per misurare qualsiasi altra grandezza omogenea con essa (cioè avente uguale formula dimensionale).

Valenza chimica
Capacità di combinazione chimica di un elemento, espressa mediante il numero di atomi di idrogeno che possono combinarsi con un atomo di quell'elemento.

Vettore
Ente matematico individuato da un numero positivo (modulo del vettore), da una direzione e da un verso. Viene impiegato per esprimere alcune grandezze (una forza, uno spostamento) per le quali appunto non basta indicare il dato quantitativo di ampiezza. Nello spazio viene rappresentato con un segmento di lunghezza proporzionale alla misura della grandezza che rappresenta, stessa direzione e stesso verso (indicato da una freccia).

Zero assoluto
Minimo assoluto di temperatura, corrispondente alla totale assenza di energia cinetica delle molecole. Sulla scala centigrada delle temperature, equivale a $-273°$ C.

Bibliografia e sussidi audiovisivi

I volumi sono indicati nell'ordine inverso rispetto alla data di pubblicazione, cioè a partire dalle opere più recenti.

Halt M.J. , McIntosh A.J., *Matematica per non matematici*, La Nuova Italia, Firenze (1978)
Waddington C., *Strumenti per pensare*, Mondadori, Milano (1977)
Spotorno B., Villani C., *Mondo reale e modelli matematici. Guida all'insegnamento della matematica nelle Scuole superiori*, La Nuova Italia, Firenze (1976)
The Open University, *Introduzione all'analisi e all'algebra. Analisi*, Mondadori, Milano (^{2}1976)
The Open University, *Introduzione all'analisi e all'algebra. Algebra*, Mondadori, Milano (1974)

Film in 16 mm

Modelling, n. T100/18, B/N, ~ 25'

Audiotapes

Modelling, n. T100/04

Fonti delle illustrazioni

Figg. 2, 3, London Transport; Fig. 5, da P. R. Ehrlich, A. H. Ehrlich, *Population, resources, environment*, W.H. Freeman and Co., Folkestone (1970); Fig. 9, da J. Pen, *Modern economics*, Penguin Books, Londra (1965); Fig. 11, da O. G. Sutton, *Understanding weather*, Penguin Books, Londra (^{3}1969); Fig. 46, Engineering, Londra (1890).

Indice analitico

Sui diversi aspetti
del sistema scienza-tecnologia-ambiente umano
altri titoli di questa collana:

J. L. Taylor, R. Walford

I GIOCHI DI SIMULAZIONE
per l'apprendimento
e l'addestramento

The Open University

L'ANALISI DEI SISTEMI
comportamento,
regolazione, controllo

The Open University

GLI EFFETTI SOCIALI
DELLA TECNOLOGIA

The Open University

LA CONOSCENZA
SCIENTIFICA

The Open University

CHI PRODUCE E COME
l'organizzazione
della produzione industriale

The Open University

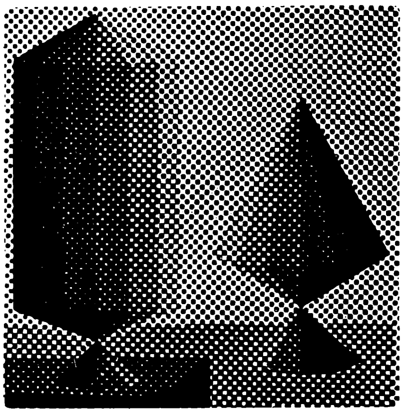
L'AMBIENTE INNATURALE
tecnologie inquinanti
e controllo dell'inquinamento

THE OPEN UNIVERSITY

Introduzione all'analisi e all'algebra ANALISI

II edizione

L. 9000



La matematica, strumento principe di ogni scienza sperimentale, è essa stessa una scienza deduttiva le cui strutture fondamentali non sono sempre note a chi ne fa uso nella ricerca scientifica e nelle applicazioni tecniche. Con questa *Introduzione all'analisi e all'algebra*, articolata in due volumi, la Open University ha inteso descrivere, con l'ausilio di un gran numero di esempi ed esercizi, quei fondamenti delle matematiche moderne che più interessano il tecnologo e il ricercatore. Il primo volume, dedicato all'analisi, illustra i metodi fondamentali del calcolo integrale e differenziale: a partire dal concetto di insieme, introduce via via le nozioni fondamentali di corrispondenza, di funzione, di successione e di serie giungendo a presentare in modo intuitivo i concetti chiave di limite e di convergenza, di derivata e di integrale. Questa visione moderna dell'analisi permette di includere in un'unica trattazione argomenti che sono svolti separatamente nei testi classici e di giungere alla descrizione delle prime equazioni differenziali nonché i metodi di calcolo numerico sempre più diffusi in tutti i campi della scienza grazie all'impiego degli elaboratori elettronici.

Biblioteca della EST

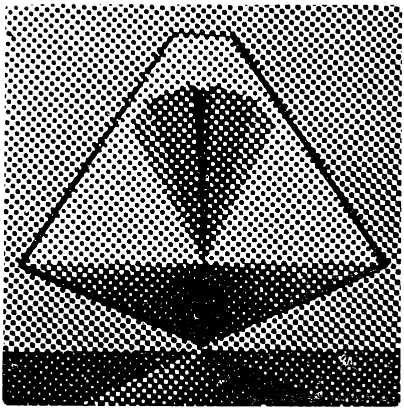
EDIZIONI SCIENTIFICHE E TECNICHE MONDADORI

THE OPEN UNIVERSITY

Introduzione all'analisi e all'algebra ALGEBRA

II edizione

L. 9000



Il secondo volume dell'*Introduzione all'analisi e all'algebra*, dedicato all'algebra, come il primo dedicato all'analisi, è stato ideato e preparato dai componenti del Mathematics Foundation Course e dell'Elementary Mathematics for Science and Technology Course della Open University. Dopo una breve trattazione preliminare di teoria degli insiemi, questo volume passa allo studio di alcune nozioni astratte, come quelle di operazione binaria, di relazione di morfismo, che individuano le principali strutture di base dell'algebra moderna; fra queste un posto particolare occupa il concetto di morfismo, per la sua capacità di illustrare uno dei temi fondamentali della ricerca matematica oltre che dell'algebra, la costruzione di modelli matematici di situazioni reali. Le sezioni centrali del testo sono dedicate allo sviluppo della nozione di spazio vettoriale, generalizzazione del comune spazio tridimensionale e strumento essenziale della ricerca contemporanea, dalla fisica quantistica alla programmazione lineare e all'econometria. Questa visione moderna dell'algebra permette di inquadrarvi anche alcune teorie ritenute dominio dell'analisi, in una sintesi di grande generalità.

Biblioteca della EST

EDIZIONI SCIENTIFICHE E TECNICHE MONDADORI

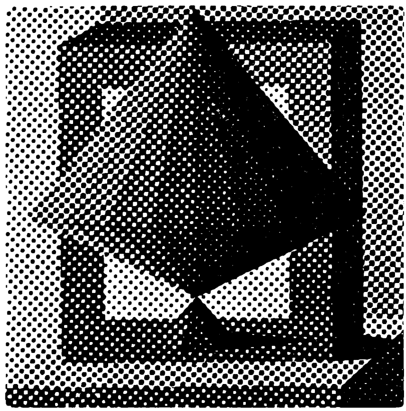
THE OPEN UNIVERSITY

PROBABILITÀ E STATISTICA

II edizione

L. 5000

La statistica è una disciplina matematica relativamente giovane, ma il suo impiego nei più diversi rami della ricerca scientifica, dalla biologia alla fisica e alla psicologia, dalla medicina pratica all'economia e alla sociologia, si fa sempre più capillare e necessario. Questo volume si affianca a quelli dedicati all'analisi e all'algebra pubblicati anch'essi nella collana Biblioteca della EST ed è opera del Mathematics Foundation Course della Open University. Al fine di conciliare la chiarezza dell'esposizione con le esigenze di rigore scientifico, gli autori affrontano i temi della statistica dal duplice punto di vista intuitivo e assiomatico: è questo il caso, ad esempio, dei concetti fondamentali di casualità e di probabilità, le cui definizioni rigorose si accompagnano alla discussione di numerosi esempi ed esercizi. In modo analogo sono introdotti, fra l'altro, indici, spazi di campioni, variabili aleatorie e la distribuzione binomiale. Senza presupporre una specifica preparazione matematica, il libro offre a studenti, insegnanti, tecnici, ricercatori e a chiunque necessiti degli strumenti della statistica una visione precisa e insieme accessibile dei suoi metodi.



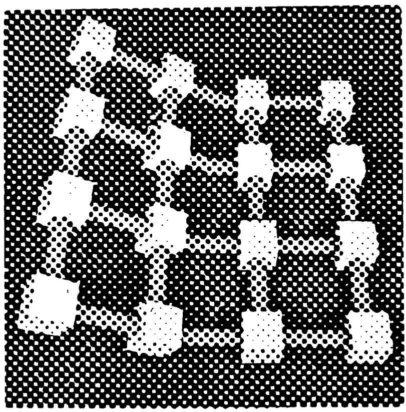
Biblioteca della EST

EDIZIONI SCIENTIFICHE E TECNICHE MONDADORI

THE OPEN UNIVERSITY

Introduzione ai MATERIALI

L. 6500



Il comportamento di materiali diversi, come i metalli e le loro leghe, i semiconduttori, i polimeri e i vetri, ha condotto tradizionalmente ad assegnare lo studio delle possibilità applicative a settori distinti della chimica e dell'ingegneria. Ma in ultima analisi tutti i materiali sono costituiti da atomi e molecole tra loro interagenti e disposti nello spazio secondo determinate strutture: il legame tra la microstruttura e le forze che tengono insieme il solido da un lato e le proprietà meccaniche, elettriche, magnetiche, ottiche dall'altro permette di superare ogni visione settoriale e di cogliere quegli elementi unificanti che qualificano un materiale ad assolvere determinate funzioni. Questo volume fa parte di un corso elaborato dai docenti della Open University, i quali lo hanno correlato a *La scienza dei materiali resistenti* di James E. Gordon pubblicato in Biblioteca della Est, e si propone di fornire al lettore una conoscenza qualitativa e concettuale della struttura dei materiali. Esso descrive dapprima i modelli strutturali teorici e le conseguenze dei difetti cristallini sul comportamento del solido; vengono prese poi in esame la conducibilità e la risposta di un solido sotto sforzo.

Biblioteca della EST

EDIZIONI SCIENTIFICHE E TECNICHE MONDADORI

QUESTO VOLUME È STATO IMPRESSO
NEL MESE DI GENNAIO 1979
PRESSO LA NUOVA STAMPA DI MONDADORI-CLES (TN)

Stampato in Italia - Printed in Italy

Una carta stradale e il plastico di una costruzione,
la formula di Einstein e lo schema a blocchi
di un processo industriale, la rappresentazione
della struttura elettronica dell'atomo,
un grafico di distribuzione statistica sono altrettanti esempi
di modelli. Essi riproducono solo le proprietà
'emergenti', cioè quelle che interessa considerare,
del sistema o della situazione reali.

Il primo passo, e il più importante, per la costruzione
di un modello è imparare a riconoscere
queste proprietà, escludendo gli aspetti marginali.

Il secondo passo è la riproduzione
delle caratteristiche essenziali del modello,
in una forma che renda possibile il confronto con la realtà
osservata. Questa forma può essere un grafico,
un oggetto tridimensionale in scala, una relazione
matematica, o anche una descrizione soltanto verbale.

Ottenuto il modello, con questo procedimento
di selezione e di schematizzazione
guidato dalla conoscenza e dall'intuito allenato,
si può studiarne il comportamento,
per affinare la descrizione o per prevedere come si evolverà
il sistema considerato. La costruzione di modelli
e il loro impiego sono oggi il supporto
di ogni attività di ricerca, di progettazione e di studio.
Ciò è vero nell'ambito della tecnologia,
nella pianificazione dei sistemi economici,
in ogni situazione che richieda una decisione e una scelta.

Questo volume è ricavato da tre dispense
del corso fondamentale di tecnologia della Open University.

16565-4

MONDADORI

THE OPEN UNIVERSITY

L 2'000

MONDADORI EDITORE
THE OPEN UNIVERSITY

PENSARE PER MODELLI